Relación 2

1-. Sea $V = (\mathbb{R}^4, +, .)$ con su estructura de espacio vectorial usual. Consideremos

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0; x + t = 0\}$$
$$W_2 =< \{(1, 2, 3, 0), (0, 3, 2, 1)\} > .$$

i) Demuestra que W_1 es un subespacio de V.

ii) Da cada una de las ecuaciones que se han visto en teoría y la dimensión de los siguientes subespacios: W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$.

iii) ¿Es $W_1 + W_2$ una suma directa?

2-. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $S = \{v\}$ con $v \in V$. Da una condición necesaria y suficiente pare que S sea un conjunto de vectores independientes. Da una condición necesaria y suficiente para que S sea un sistema de generadores de V.

3-. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea G un sistema de generadores de V y sea X un subconjunto de V. Demuestra que si $G \subset< X >$, entonces X es también un sistema de generadores de V.

4-. Sea $V = (\mathbb{R}^3, +, .)$ espacio vectorial usual sobre los reales.

(1) Demuestra que el conjunto $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (1, 0, 1)\}$ es una base de V. Da las coordenadas del vector $(1, 1, 1)$ respecto de esta base.

(2) Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de V, demuestra que $\{v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2, v_1\}$ también es una base de V.

5-. Encuentra una base de $\mathbb{C}^4$ que contenga al siguiente conjunto de vectores $\{(i, i, i, i), (1, 1, 1, 0)\}$. ¿Existirá alguna base que contenga a $\{(i, i, i, i), (1, 1, 1, 1)\}$?

6-. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Sean S y T subconjuntos de V tales que $S \subset T$. Entonces:

(i) Si S es un conjunto de vectores dependientes, entonces T es un conjunto de vectores dependientes. Si T es un sistema de generadores, entonces S es un sistema de generadores.

(ii) Supongamos que la dimensión de V es n. Todo sistema de generadores de V con n elementos es base. Todo sistema independiente de V con n elementos es base.

7-. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión n.

(i) Si S es un conjunto de vectores independientes de V de cardinal n, entonces S es una base de V.

(ii) Si G es un sistema de generadores de V de cardinal n, entonces G es una base de V.

8-. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $W \leq V$. Supongamos que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Demuestra que $\dim_{\mathbb{K}}(W) \leq n$ y se da la igualdad si y sólo si $V = W$.

9-. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W, U dos subespacios vectoriales de V. Sea B una base de W y B' una base de U. Entonces $B \cup B'$ es un conjunto de vectores linealmente independiente si y sólo si $W \oplus U$.

10-. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio de V. Se dice que un subespacio U de V es un suplemento para W si $W \oplus U = V$. Demuestra que todo subespacio vectorial posee suplemento.

11-. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid 2x+3y+z+t = 0;\ x+t = 0\}$. Calcula una base y la dimensión de $\mathbb{K}^4/W$. Da las coordenadas del vector $(1, 1, 1, 1)$ en dicha base.

12-. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y X un conjunto. Definimos

$$V_X = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f(x) = 0 \text{ para casi todo } x \in X\}$$

(i) Demuestra que V_X con la suma y multiplicación usuales de aplicaciones es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$: dados $f, g \in V_X$,

$$\begin{aligned} f + g : X \to \mathbb{K} \ &\text{ como } \ f + g(x) = f(x) + g(x) \\ \lambda f : X \to \mathbb{K} \ &\text{ como } \ \lambda f(x) = \lambda f(x) \end{aligned}$$

(ii) Demuestra que $\{f_y\}_{y \in X}$ es una base de V_X, con $f_y : X \to \mathbb{K}$ definida por

$$f_y(x) = \begin{cases} 1 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases}$$

(iii) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea B una base de V. Demuestra que la única aplicación lineal $\Phi : V \to V_B$ definida por $\Phi(e_i) = f_{e_i}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Por tanto dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo son isomorfos si y sólo si sus bases tienen el mismo cardinal.