Relación 3

1-. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean v_1, v_2 y v_3 tres vectores de V. Da una condición necesaria y suficiente para que

$$W := < \{v_1, v_2\} > = < \{v_1, v_3\} > = < \{v_2, v_3\} > \quad \text{y} \quad \dim_{\mathbb{K}}(W) = 2$$

¿y para que $\dim_{\mathbb{K}}(W) = 1$? ¿y para que $< \{v_1, v_2\} > = < \{v_1, v_3\} >$?

2-. ¿Es la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z, t) = (2x + y + z + t, 2x + 2y, y + t)$$

lineal? ¿Es inyectiva? ¿Y sobreyectiva? Calcula la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas. Encuentra bases apropiadas para que la matriz asociada a f respecto de estas bases sea de la forma $\begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Quien es r?

3-. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y consideremos $\{(1, 2, 3), (5, 1, 0), (1, 0, 0)\} \subset \mathbb{K}^3$. ¿Existe una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ tal que $f(1, 2, 3) = (1, 1)$, $f(5, 1, 0) = (0, 0)$ y $f(1, 0, 0) = (1, 1)$? ¿Es única? Calcula $Ker(f)$ e $Im(f)$ comprobando la formula de las dimensiones.

4-. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Encuentra una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$ tal que $f(1, 1) = ((2, 3, 4)$ y $Ker(f)$ tenga dimensión maximal. Da una respuesta razonada de porqué tu solución es correcta.

5-. Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los reales y $\mathbb{R}[X]$ el espacio vectorial de los polinomios reales. Demuestra que la derivada es una aplicación lineal de $\mathbb{R}[X]$ en $\mathbb{R}[X]$. ¿Es inyectiva? ¿Y sobreyectiva?

6-. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$. Demuestra que si $\dim_{\mathbb{K}}(V) < \dim_{\mathbb{K}}(W)$, entonces f no es sobreyectiva y que si $\dim_{\mathbb{K}}(W) < \dim_{\mathbb{K}}(V)$, entonces f no es inyectiva.

7-. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ un isomorfismo de espacios vectoriales. Demuestra que $f^{-1} : W \to V$ es también un isomorfismo de espacios vectoriales.

8-. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to V$ un endomorfismo de espacios vectoriales. Demuestra que f es inyectiva si y sólo si f es sobreyectiva si y sólo si f es biyectiva.

9-. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal.

(i) Demuestra que la aplicación $\overline{f} : V/Ker(f) \to W$ definida por $\overline{f}([v]) = f(v)$ está bien definida y es un monomorfismo de espacios vectoriales.

(ii) Demuestra que $V/Ker(f)$ es isomorfo a $Im(f)$, es decir, $V/Ker(f) \cong Im(F)$.

(iii) Demuestra, a partir de lo anterior, la formula de las dimensiones.

10-. Sea V un espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_1 y W_2 dos subespacios de V. Sea la aplicación $f : W_1 \to (W_1 + W_2)/W_2$ definido por $f(w_1) = [w_1 + 0]$

(i) Demuestra que f está bien definida y es un homomorfismo de espacios vectoriales.

(ii) Calcula $Ker(f)$.

(iii) demuestra, usando el ejercicio anterior que $(W_1 + W_2)/w_2 \cong W_1/(W_1 \cap W_2)$.

(iv) concluir que $\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{K}}(W_1) + \dim_{\mathbb{K}}(W_2) - \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2)$.

11-. Calcula dos matrices inversibles P, Q tales que $QAP = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 11 & 11 \end{pmatrix}$. ¿ Quien es r?

12-. Demuestra que la matriz P es inversible. ¿Es P una matriz de cambio de base? Encuentra dos bases B, B' de $\mathbb{R}^4$ tal que $P = C_{BB'}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

13-. Sea $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ definida por $f(x, y, z) = (2x + 3y + z, 2x + 3y)$.

(i) Encuentra la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

(ii) Sean $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 0, 0)\}$ base de $\mathbb{K}^3$ y $B' = \{(1, 1), (0, 1)\}$ base de $\mathbb{K}^2$. Encuentra la matriz asociada a f respecto B y B'.

(iii) Calcula las matrices de cambio de base y demuestra que has hecho bien los cálculos.