Relación 4

1-. Explica razonadamente porqué el número de parámetros en la solución de un sistema de ecuaciones lineales es el número de incógnitas menos el rango del sistema (rango de la matriz asociada y de la matriz asociada extendida).

2-. Encuentra un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas en $\mathbb{R}^3$ que tenga en su conjunto solución a $\{(1,1,1),(3,3,3),(1,1,0)\}$ y no tenga a $\{(1,0,1)\}$. ¿Este sistema puede no tener al punto $(1,1,2)$? Razona la respuesta.

3-. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ números reales distintos y no nulos. Demuestra que la matriz A es inversible:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \ldots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

4-. Sea V un espacio vectorial de dimensión dos sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una aplicación multilineal alternada tal que $f(v, V) \neq 0$ para todo $0 \neq v \in V$. Demuestra que hay una base $B = \{v_1, v_2\}$ de V tal que $f(v_1, v_1) = 0$, $f(v_2, v_2) = 0$ y $f(v_1, v_2) = 1$.

5-. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Demuestra que A tiene rango n entonces $Adj(A)$ tiene rango n. ¿Es cierto el recíproco?

6-. Calcula el rango de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7-. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se sabe que $Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ y que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ x & y & z \end{pmatrix}$. Calcula el determinante de A. ¿Puedes determinar y, x y z?

8-. ¿El rango de una matriz coincide con el rango de su matriz adjunta?