Relación 5

1-. Encuentra si existe una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ que tenga por valores propios a 2, 3, 5, 7 y 11.

2-. Di si la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es diagonalizable y, en caso afirmativo, encuentra una base de vectores propios.

$$f(x, y, z) = (2x + 3y + 5z, 3y + 2z, 7z)$$

3-. Di si la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es diagonalizable y, en caso afirmativo, encuentra una base de vectores propios.

$$f(x, y, z, t) = (y + z + t, z + t, t, 0)$$

4-. Demuestra que una aplicación lineal f es inyectiva si y sólo si el cero no es valor propio de f.

5-. Calcula A^{1000} en donde:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Nota: Diagonaliza primero calculando la matriz de cambio de base P. Entonces $A = PDP^{-1}$ y por tanto $A^{1000} = PD^{1000}P^{-1}$.

6-. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \to V$ una aplicación lineal biyectiva. Demuestra que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de f so y sólo si λ^{-1} es valor propio de f^{-1}.

7-. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \to V$ una aplicación lineal. Sea v un vector propio con valor propio λ y w un vector propio con valor propio μ. Demuestra que $v + w$ es un vector propio si y sólo si $\lambda = \mu$.

8-. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \to V$ una aplicación lineal tal que todo vector de V es vector propio. Demuestra que f es múltiplo de la identidad (es decir, que existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f = \lambda \mathrm{Id}$).

9-. Construye aplicaciones lineales $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que: f_1 no tenga vector propio, f_2 tenga un único vector propio, f_3 tenga dos vectores propios y f_4 tenga tres vectores propios.

10-. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \to V$ una aplicación lineal diagonalizable. Sea W un subespacio de V tal que $f(W) \subset W$. ¿Es $f|_W : W \to W$ diagonalizable?