PRUEBA 17-XII-2004.

Examen de Álgebra y Geometría

1-. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $V = \mathbb{K}^3$. Sean

$$W_1 = \{(x, y, z) \in V \mid x + y + z = 0\}$$
$$W_2 =< \{(1, 2, 3), (1, 1, 1)\} >$$

(a) Demuestra que W_1 es un subespacio de V. [0.5]

(b) Determina $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$ y da sus dimensiones. [1]

(c) Ecuaciones vectoriales, paramétricas, continuas y cartesianas de $W_1 \cap W_2$. [0.75]

(d) ¿Es la suma de W_1 y W_2 directa? [0.25]

2-. (a) Determina dos matrices inversibles P y Q tales que $QAP = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

¿Quien es r? [1]

(b) Al ser P inversible, ¿ Es P una matriz de cambio de base? En caso afirmativo determina bases B y B' de $\mathbb{R}^2$ tales que $C_{BB'} = P$. [0.5]

3-. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio de V.

(a) Demuestra que la aplicación $\Pi : V \to V/W$ definida por $\Pi(v) = [v]$ es un epimorfismo de espacios vectoriales. [0.75]

(b) Demuestra que $Ker(\Pi) = W$. Concluye que un subconjunto W de V es un subespacio vectorial si y sólo si es el núcleo de alguna aplicación lineal. [0.75]

4-. Razona si las siguientes afirmaciones son verdadera o falsas:

(a) Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ tal que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 20$ y W_1, W_2 son subespacios vectoriales de V de dimensiones 17 y 5 respectivamente, entonces la suma de W_1 y W_2 no es directa. ¿Importa que 17 y 5 sean números primos? [0.75]

(b) Sea V un espacio vectorial y $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un subconjunto de V. Vamos a elegir un subconjunto Y de X de la siguiente manera: Si v_1 es un vector independiente lo "echo" en Y, en caso contrario lo descarto. Si v_2 es independiente del conjunto Y que estoy construyendo, añado v_2 a Y, en caso contrario lo descarto. Repito el proceso con los siguientes. ¿ Si permuto el orden de los vectores en X, el conjunto Y puede variar? ¿ Puede variar su cardinal?. [1]

(c) Todo espacio vectorial no nulo tiene un número infinito de elementos. [0.25]

Nota 1: El número que aparece al lado de cada ejercicio es su puntuación.

Nota 2: El examen puntúa sobre 7.5, ya que no hay nada de los últimos temas.

Nota 3: 1, 2(a), 3(a) y 4(a) son preguntas básicas (el $66,\widehat{6}\,\%$ de la puntuación).