

Relación 2

1- Sea $V = (\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ con su estructura de espacio vectorial usual. Consideremos

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0; x + t = 0\}$$

$$W_2 = \langle \{(1, 2, 3, 0), (0, 3, 2, 1)\} \rangle.$$

i) Demuestra que W_1 es un subespacio de V .

ii) Da cada una de las ecuaciones que se han visto en teoría y la dimensión de los siguientes subespacios: W_1 , W_2 , $W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$.

iii) ¿Es $W_1 + W_2$ una suma directa?

2- Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} y sea $S = \{v\}$ con $v \in V$. Da una condición necesaria y suficiente para que S sea un conjunto de vectores independientes. Da una condición necesaria y suficiente para que S sea un sistema de generadores de V .

3- Sea $V = (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ espacio vectorial usual sobre los reales.

(1) Demuestra que el conjunto $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (1, 0, 1)\}$ es una base de V . Da las coordenadas del vector $(1, 1, 1)$ respecto de esta base.

(2) Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de V , demuestra que $\{v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2, v_1\}$ también es una base de V .

4- Encuentra una base de \mathbb{C}^4 que contenga al siguiente conjunto de vectores $\{(i, i, i, i), (1, 1, 1, 0)\}$. ¿Existirá alguna base que contenga a $\{(i, i, i, i), (1, 1, 1, 1)\}$?

5- Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{F} . Sean S y T subconjuntos de V tales que $S \subset T$. Entonces:

(i) Si S es un conjunto de vectores dependientes, entonces T es un conjunto de vectores dependientes. Si T es un sistema de generadores, entonces S es un sistema de generadores.

(ii) Supongamos que la dimensión de V es n . Todo sistema de generadores de V con n elementos es base. Todo sistema independiente de V con n elementos es base.

6- Contesta razonadamente si las siguientes cuestiones son verdaderas o falsas: (i) En un espacio vectorial de dimensión 5 no hay conjuntos de 7 vectores linealmente independientes. (ii) En un espacio vectorial de dimensión 7 no hay conjuntos de 5 vectores que sean un sistema generador.