TEMA 1.

1. INTRODUCCIÓN

Comenzamos este primer tema con una breve introducción a la teoría de conjuntos, ya que ésta es necesaria a lo largo de la asignatura. Seguidamente introduciremos la noción de cuerpo lo que nos permitirá hacer un estudio general de los sistemas de ecuaciones lineales y su resolución. Este estudio es necesario ya que cuando entremos propiamente en el mundo del álgebra lineal la mayoría de los problemas van a consistir, en último término, en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales (S.E.L). Damos en este primer capítulo nociones generales sobre S.E.L e introducimos el método de Hermite-Gauss, que a la vez de no necesitar una teoría subyacente complicada, es efectivo a la hora de resolver este tipo de sistemas de ecuaciones.

2. CONJUNTOS.

En este capítulo vamos a dar, sin ser muy estrictos, algunas nociones necesarias para la comprensión de la asignatura.

2.1 Def: Se define un conjunto como una colección de objetos. Un conjunto quedará determinado por una propiedad que caracterice a los elementos que lo forman.

2.2 Ejemplos.

(a) El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$.

(b) El conjunto de los números naturales que son pares.

(c) $A = \{1, 2, a\}; B = \{a, b, c\}; C = \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

2.3 Notación: En general, los conjuntos los denotaremos por letras mayúsculas mientras que los elementos serán denotados por letras minúsculas.

2.4 Def: Diremos que un elemento *a pertenece* a un conjunto X, y lo denotaremos por $a \in X$, si a es uno de los miembros de X. Si a no es miembro de X diremos que *a no pertenece* a X y lo denotaremos por $a \notin X$.

2.5 Def: Sean X, Y dos conjuntos. Diremos que X es un *subconjunto* de Y, y lo representaremos por $X \subset Y$, si todo elemento de X es elemento de Y, es decir,

$$X \subset Y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall a \in X, \;\Rightarrow\; a \in Y$$

2.6 Def: Sean X, Y dos conjuntos. Diremos que X es igual a Y, y lo representaremos $X = Y$, si $X \subset Y$ e $Y \subset X$.

2.7 Def: Definimos el conjunto vacío como aquél que carece de elementos, lo representamos por $\emptyset$.

2.8 Def: Dado un conjunto X definimos el conjunto partes de X, y lo representamos por $\mathcal{P}(X)$ como el conjunto que tiene por elementos los subconjuntos de X.

2.9 Ejemplo. Para $A = \{1, 2, a\}$, se tiene que

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{a\}, \{1, 2\}, \{1, a\}, \{2, a\}, \{1, 2, a\}\}.$$

Observar que si un conjunto X tiene n elementos, $\mathcal{P}(X)$ tiene 2^n elementos.

3. OPERACIONES CON CONJUNTOS

3.1 Def: Dados dos conjuntos X, Y, se define la unión de X con Y y se representa por $X \cup Y$ a un nuevo conjunto que tiene por elementos tanto los elementos de X como los de Y.

$$X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ ó } z \in Y\}$$

3.2 Def: Dados dos conjuntos X, Y, se define la intersección de X con Y y se representa por $X \cap Y$ a un nuevo conjunto que tiene los elementos que están tanto en X como en Y.

$$X \cap Y = \{z \mid z \in X \text{ y } z \in Y\}$$

3.3 Def: Dados dos conjuntos X, Y, se define la diferencia de X con Y y se representa por $X - Y$ al conjunto formado por los elementos de X que no están en Y. Es decir,

$$X - Y = \{z \in X \mid z \notin Y\}$$

3.4 Def: Dados dos conjuntos X, Y, se define la diferencia simétrica de X con Y y se representa por $X \triangle Y$ al conjunto formado por los elementos de X que no están en Y junto con los de Y que no están en X. Es decir,

$$X \triangle Y = (X \cup Y) - (Y \cap X) = (X - Y) \cup (Y - X)$$

3.5 Def: Dados dos conjuntos X, Y, con X subconjunto de Y se define el complemento de X en Y y se representa por $\overline{X}$ al conjunto formado por los elementos de Y que no están en X. Es decir,

$$\overline{X} = \{z \in Y \mid z \notin X\}$$

Observar que $\overline{X} = Y - X$.

3.6 Def: Dados dos conjuntos X, Y se define el producto cartesiano de X e Y y se representa por $X \times Y$ como un nuevo conjunto formado por todos los pares (x, y) en donde $x \in X$ e $y \in Y$.

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

Observar que si X tiene n elementos e Y tiene m elementos, $X \times Y$ tiene nm elementos.

3.7 Ejemplo. Dados $A = \{1, 2, a\}$ y $B = \{a, b, c\}$ se tiene que

$$A \times B := \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (a, a), (a, b), (a, c), \}$$

3.8 Def: Dados n conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se define el producto cartesiano de los X_i con $i = 1, 2, \ldots, n$ y se representa por $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \Pi_{i=1}^n X_i$ como un nuevo conjunto formado por todas las n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en donde $x_i \in X_i$ con $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\Pi_{i=1}^n X_i := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i \text{ con } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

4. PROPIEDADES

(i) Propiedad conmutativa: $X \cup Y = Y \cup X; \quad X \cap Y = Y \cap X.$

(ii) Propiedad asociativa: $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z).$$

(iii) Propiedad distributiva: $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$

$$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

(iv) Propiedad Idempotente: $X \cup X = X; \quad X \cap X = X.$

(v) Leyes de simplificación: $(X \cup Y) \cap X = X; \quad (X \cap Y) \cup X = X.$

(vi) Leyes de Morgan: $\overline{(X \cup Y)} = \overline{X} \cap \overline{Y}; \quad \overline{(X \cap Y)} = \overline{X} \cup \overline{Y}.$

5. FUNCIONES

5.1 Def: Dados dos conjuntos no vacíos X, Y, se define una función f de X en Y, y se representa por $f : X \to Y$, como un subconjunto $F \subset X \times Y$ tal que para todo $x \in X$ existe un único $y \in Y$ con $(x, y) \in F$ (este elemento y no es más que lo que usualmente llamamos $f(x)$).

Observación: Una aplicación no es más que una regla por la cual a cada elemento de X se le asigna un y sólo un elemento de Y.

5.2 Ejemplos.

⋆ Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = 2n + 1$.

⋆ Sea X un conjunto no vacío y x_0 un elemento de X. entonces tenemos dos aplicaciones naturales:

  – La aplicación identidad. $Id_X : X \to X$ definida por $Id_X(x) = x$ para todo $x \in X$.

  – La aplicación constante. $f_{x_0} : X \to X$ definida por $f(x) = x_0$ para todo $x \in X$.

5.3 Def: Diremos que una aplicación $f : X \to Y$ es inyectiva si $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$.

5.4 DEF: Diremos que una aplicación $f : X \to Y$ es sobreyectiva si para todo $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

5.5 DEF: Diremos que una aplicación $f : X \to Y$ es biyectiva si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

5.6 EJEMPLOS.

(1). La aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$ es biyectiva.

(2). La aplicación $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = 2x + 1$ es sólo inyectiva. No existe ningún natural n tal que $f(n) = 4$.

(3). La aplicación $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva. $h(2) = h(-2)$ por lo que no es inyectiva y no existe ningún elemento $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -1$, por lo que no es sobreyectiva.

5.7 DEF: Sean X, Y, Z tres conjuntos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos aplicaciones. Se define la composición de f con g y se representa por $g \circ f$ como la aplicación $g \circ f : X \to Z$ definida por $g \circ f(x) := g(f(x))$ para todo $x \in X$.

5.8 LEMA. La composición de aplicaciones es asociativa.

Nota: la composición de aplicaciones no es necesariamente conmutativa, pero posee una especie de elemento unidad. Si $f : X \to Y$ es una aplicación $Id_Y \circ f = f$ y $f \circ Id_X = f$, en donde Id_X (resp. Id_Y) denotan la aplicación identidad en X (Resp. en Y).

5.9 DEF: Sean X e Y dos conjuntos y $f : X \to Y$ una aplicación. Diremos que f es inversible si existe una aplicación $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = Id_Y$ y $g \circ f = Id_X$.

5.10 PROPOSICIÓN. Sean X, Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) f es biyectiva.

(2) Existe una aplicación $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = Id_Y$ y $g \circ f = Id_X$.

Es más, la aplicación g es única, por lo que la denotaremos por f^{-1}.

5.11 DEF: Sean X, Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. dado un subconjunto Y' de Y se define la imagen inversa de Y' y se denota por $f^{-1}(Y')$ como:

$$f^{-1}(Y') := \{x \in X \mid f(x) \in Y'\}$$

Nota: para esta definición no hace falta que f sea biyectiva y tenga inverso, $f^{-1}(Y')$ es sólo una notación (puede que mala) que no es la aplicación inversa.

6. LA NOCIÓN DE CUERPO

6.1 DEF: Sea R un conjunto no vacío. Una operación interna en R, que denotaremos por $*$, es una aplicación del producto cartesiano $R \times R$ en R.

6.2 EJEMPLOS CONOCIDOS: La suma o el producto usuales en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. La unión y la intersección en el conjunto de partes de un conjunto, $\mathcal{P}(X)$.

6.3 PROPIEDADES. Sea R un conjunto no vacío y $*$ una operación en R. Diremos que $*$ es:

– **Asociativa:** para todo $x, y, z \in R$ se verifica que $(x * y) * z = x * (y * z)$.

– **Conmutativa:** para todo $x, y \in R$ se verifica que $x * y = y * x$.

– **Existencia de elemento neutro:** se dice que $*$ posee elemento neutro si existe $e \in R$ tal que para todo $x \in R$, $\quad x * e = e * x = x$

Nota: El elemento neutro de existir es único.

– **Existencia de inverso (u opuesto):** si $*$ es una operación que posee elemento neutro, digamos e, se dice que $x \in R$ posee inverso (u opuesto) si existe $y \in R$ tal que $\quad x * y = y * x = e$.

Se dice que $*$ posee inverso si todo elemento de R posee inverso.

6.4 EJERCICIO. Di que propiedades verifican las operaciones dadas en (6.2).

6.5 DEF: Sea G un conjunto y $*$ una operación en G. se dice que $(G, *)$ es un *grupo* si $*$ es asociativa, posee elemento neutro y todo elemento posee inverso. Se dice que $(G, *)$ es un *grupo abeliano* (o conmutativo) si además, $*$ es conmutativa.

6.6 EJEMPLOS. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q} - \{0\},\ )$, $(\mathbb{R} - \{0\},\ )$ son grupos abelianos. El conjunto de aplicaciones biyectivas en un conjunto con al menos 3 elementos es un grupo no abeliano. $(\mathbb{Q},\ )$ no es un grupo.

Estamos acostumbrados, cuando trabajamos con las operaciones usuales en conjuntos de “números” o en ciertas estructuras algebraicas (como puede ser el conjunto de las matrices) trabajar no con una única operación, sino con varias que interrelacionan (normalmente la suma y el producto). Siguiendo esta ideal se introduce la noción de anillo:

6.7 DEF: Sea R un conjunto no vacío con dos operaciones "+" y " " a la primera operación se la suele denominar suma y a la segunda producto. Diremos que $(R, +,\ )$ es un anillo si:

– $(R, +)$ es un grupo abeliano.

– la segunda operación es asociativa.

– Se verifican la propiedad distributivas: para todo $x, y, z \in R$

$$(x + y)z = xz + yz \qquad z(x + y) = zx + zy.$$

Nota: Al neutro de la suma se le denotará por 0.

6.8 LEMA. Sea $(R, +,\ )$ un anillo. Entonces para todo $x \in R$ se tiene que $0x = x0 = 0$.

$\star$ Diremos que un anillo $(R, +,\ )$ es unitario si la segunda operación posee elemento unidad. A la unidad se la denotará normalmente por 1.

$\star$ Diremos que un anillo $(R, +,\ )$ es conmutativo si la segunda operación es conmutativa.

$\star$ Diremos que un anillo $(R, +,\ )$ es de división si todo elemento no nulo de R tiene inverso.

$\star$ Diremos que un anillo $(R, +,\ )$ es un cuerpo si es un anillo de división conmutativo.

Nota: Un anillo $(R, +,\ )$ es un cuerpo si y sólo si:

– $(R, +)$ es un grupo abeliano.

– $(R^*,\ )$ es un grupo abeliano. $\qquad (R^* := R - \{0\})$

Nota: Un cuerpo se comporta exactamente como $\mathbb{Q}$, los números racionales o $\mathbb{R}$, los números reales, es decir, en un cuerpo podemos sumar, restar, multiplicar y dividir (eso si, por elementos no nulos).

6.9 EJEMPLOS. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ son anillos unitarios. $2\mathbb{Z} := \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ es un anillo no unitario. El conjunto de matrices cuadradas sobre un anillo cualquiera, con su suma y su producto usual es un anillos, que denotamos por $\mathcal{M}_n(R)$ con R un anillo (observar que este último anillo no es conmutativo para $n > 1$).

6.10 Ejemplo. Los anillos realmente no tienen que ser de "números". Sea X un conjunto no vacío y denotemos por $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X. Entonces $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ tiene estructura de anillo conmutativo y unitario.

Nota: el anillo anterior no es un cuerpo salvo que X tenga un único elemento.

6.11 Ejemplo: los anillos módulo n Sea n un número natural y consideremos $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Observar que $\mathbb{Z}_n$ tiene n elementos. Dados $a, b \in \mathbb{Z}_n$ definimos:

– La suma de a y b como el resto de dividir $a + b$ por n.

– El producto de a y b como el resto de dividir ab por n.

Entonces $(\mathbb{Z}_n, +, \ )$ tiene estructura de anillo conmutativo y unitario. Es más, se demostrara en la asignatura de introducción al álgebra que si $n = p$ es un número primo, $(\mathbb{Z}_p, +, \ )$ es un cuerpo (con p elementos).

7. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sea K un cuerpo (se puede tener en mente el cuerpo de los racionales, de los reales o de los complejos). A los elementos del cuerpo los llamaremos escalares.

7.1 Definición. Por una *ecuación lineal* en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (con n incognitas) entenderemos una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

en donde $a_1, a_2, \ldots a_n, b \in K$ son llamados los coeficientes de la ecuación. Un *sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas* será una expresión:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

en donde m es el número de ecuaciones y n el número de incógnitas.

Se dice que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ (en este orden) es una solución del sistema si:

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n &= b_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2n}\lambda_n &= b_2 \\ \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mn}\lambda_n &= b_m \end{aligned}$$

Es decir, si al "sustituir" cada una de las variables por los valores dados todas las igualdades se satisfacen.

Al conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales se le denominará el *conjunto solución* del sistema, que denotaremos por S.

7.2 Un sistema de ecuaciones lineales se dirá que es *incompatible* si no posee soluciones, *compatible determinado* si su conjunto solución posee un único elemento y *compatible indeterminado* si posee más de un elemento.

Nota: Al trabajar en el cuerpo de los racionales, de los reales, o de los complejos, un sistema de ecuaciones lineales puede tener o 0 soluciones, o una solución o infinitas soluciones. En general esta propiedad no es cierta. Hay cuerpos en donde un sistema de ecuaciones lineales (un sistema compatible indeterminado) puede tener un número finito de soluciones, es decir, más de una y menos de infinitas.

Ejemplo en $\mathbb{Z}_7$, la ecuación $x + y = 1$ tiene por conjunto de soluciones

$$S = \{(0,1), (1,0), (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}.$$

7.3 Diremos que dos sistemas de ecuaciones lineales son *equivalentes* si poseen el mismo conjunto de soluciones.

Nos vamos a centrar ahora en "manipular" sistemas de ecuaciones lineales, pasando de un sistema a otro equivalente, y más simple, hasta obtener uno que nos permita calcular su conjunto solución.

7.4 TEOREMA. Las siguientes manipulaciones en un sistema de ecuaciones lineales proporcionan sistemas de ecuaciones lineales equivalentes:

(i) Intercambiar la ecuación i-esima por la j-esima.

(ii) Multiplicar una de las ecuaciones lineales por un escalar no nulo.

(iii) Sumarle a la ecuación i-esima la ecuación j-esima multiplicada por un escalar.

7.5 Método de Gauss. Vamos a dar en este apartado un "algoritmo" que nos va a permitir encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales: Sea

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

un sistema de ecuaciones lineales.

Paso 1 Nos fijamos en la primera columna y nos quedamos con una ecuación que tenga coeficiente no nulo. Cambiamos esta ecuación por la que esté en primer lugar.

Paso 2 Multiplicamos la primera ecuación, que ahora tiene coeficiente en la primera variable no nulo, por el inverso de este coeficiente. Así obtenemos una nueva primera ecuación con coeficiente uno en la primera variable.

$\star$ Si en el primer paso cambiamos una ecuación con coeficiente uno, nos ahorramos este segundo paso.

Paso 3 Restamos a la ecuación i-esima la ecuación primera multiplicada por el coeficiente primero de esta ecuación i-esima. Nos queda un nuevo sistema (equivalente al primero) que en la primera columna tiene un uno en la primera ecuación y un cero en todas las demás.

Paso 4 Nos olvidamos de la primera ecuación y repetimos el proceso con las ecuaciones restantes.

Pasa 5 Terminado el proceso resuelvo el sistema (hacia arriba).

Visto que la explicación de este algoritmo es "molesta" veamos un ejemplo practico del mismo:

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 5z &= 10 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x + 4y + z &= 7 \end{aligned}$$

Paso 1 Cambio la segunda ecuación por la primera. Podía pasar directamente al paso dos, pero entonces aparecerían decimales, que son mas molestos para trabajar.

$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ 3x+2y+5z&=10\\ 2x+4y+z&=7 \end{aligned}$$

Paso 2 No hace falta.

Paso 3 Resto a la segunda ecuación la primera multiplicada por tres y a la tercera ecuación la primera multiplicada por dos:

$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ -y+2z&=1\\ 2y-z&=1 \end{aligned}$$

Paso 4 Trabajo ahora con las dos últimas ecuaciones:

Paso 1 No hace falta.

Paso 2 Multiplico la segunda ecuación por -1.

$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ y-2z&=-1\\ 2y-z&=1 \end{aligned}$$

Paso 3 A la tercera ecuación le resto la segunda multiplicada por dos.

$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ y-2z&=-1\\ 3z&=3 \end{aligned}$$

Paso 5 De la última ecuación, $z=1$. Sustituyo en la segunda ecuación $z=1$ y obtengo $y=1$. Sustituyo $z=1$ e $y=1$ en la primera ecuación y obtengo, $x=1$. Luego era un sistema compatible determinado. Única solución $x=1$, $y=1$, $z=1$.

Nota: Naturalmente los sistemas de ecuaciones lineales del examen serán más difíciles.

7.6 Una vez terminado el algoritmo de Gauss nos vamos a encontrar con un sistema de ecuaciones en forma “triangular”.

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \dots & +a_{1(n-1)}x_{n-1} & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \dots & +a_{2(n-1)}x_{n-1} & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
 & & +a_{33}x_3 & + & \dots & +a_{3(n-1)}x_{n-1} & +a_{3n}x_n & = b_3 \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & +a_{(n-1)n}x_n & = b_{n-1} \\
 & & & & & & a_{(n-1)n}x_n & = b_n
\end{array}$$

$\star$ La solución del sistema se obtiene "despejando las variables de abajo para arriba".

BIBLIOGRAFÍA

[1] **E. Hernández:** "Álgebra y Geometría", *Addison-Wesley*, 1994.

[2] **M. Castellet, I. Llerena:** "Álgebra lineal y Geometría", *Reverte*, 1991.

[3] **Seymour Lipschutz:** "Álgebra Lineal", *McGraw-Hill*, 1993.

[4] **David C. Lay:** "Álgebra Lineal y sus aplicaciones", *Addison Wesley Longman*, 1999.

Nota: En general cualquier libro sobre *Álgebra Lineal* o *Geometría* tratará estos temas.