TEMA 2.

1. INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a introducir la noción de espacio vectorial dando los ejemplos más relevantes de los mismos. Aparecerá la noción de subespacio vectorial (que entre otras cosas serán nuevos ejemplos de espacios vectoriales), así como la obtención de nuevos subespacios a partir de unos dados "lo que llamaremos operaciones entre subespacios". Aparecerán los conceptos de subespacio generado, sistema generador y conjunto de vectores independientes, que nos llevarán a la definición de bases de un espacio vectorial y por el teorema de invariabilidad del número de elementos entre distintas bases de un espacio vectorial, obtendremos la noción de dimensión de un espacio vectorial. Concluiremos obteniendo nuevos ejemplos de espacios vectoriales a partir de otros, la suma directa de espacios vectoriales, el producto de espacios vectoriales y el espacio vectorial cociente.

2. ESPACIO VECTORIAL. SUBESPACIO VECTORIAL. EJEMPLOS

2.1 Def: Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y V un conjunto no vacío con dos operaciones, una interna $+ : V \times V \to V$ y otra externa $\mathbb{K} \times V \to V$ tal que:

$\star$ La operación interna (también llamada suma) tiene estructura de grupo abeliano, es decir,

(1.1) Propiedad asociativa: $(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall\ u, v, w \in V$.

(1.2) Existencia de elemento neutro: $\exists\ \overline{0} \in V$ tal que $\forall\ v \in V, \quad \overline{0}+v = v+\overline{0} = v$.

(1.3) Existencia de elemento opuesto: $\forall\ v \in V,\ \exists\ -v \in V$ tal que $(-v) + v = v + (-v) = \overline{0}$.

(1.4) Propiedad conmutativa: $u + v = v + u \quad \forall\ u, v \in V$.

$\star$ La operación externa (producto por escalares) verifica,

(2.1) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \quad \forall\ u, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$.

(2.2) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \quad \forall\ v \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(2.3) $1v = v \quad \forall\ v \in V$.

(2.4) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad \forall\, v \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Nota: A los elementos de V los llamaremos vectores. A los elementos del cuerpo los llamaremos escalares.

2.2 Ejemplos.

1-. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}^n$ con la suma y producto por escalares "usuales" tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}^n := \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \mid \lambda_i \in \mathbb{K},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

$\star$ Suma por componentes:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \mu_2 \ldots, \mu_n) := (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots, \lambda_n + \mu_n)$$

$\star$ Multiplicación por escalares:

$$\mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) := (\mu\lambda_1, \mu\lambda_2, \ldots, \mu\lambda_n)$$

Nota: Si $n = 1$ tenemos que $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre sí mismo. $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, en donde $\mathbb{R}$ es el cuerpo de los números Reales son espacios vectoriales que ya se conocen (estudiados en física).

2-. El conjunto $\{\overline{0}\}$ es espacio vectorial para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, con la única suma y multiplicación por escalares posible:

$$\overline{0} + \overline{0} = \overline{0} \quad \text{y} \quad \lambda\overline{0} = \overline{0} \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

3-. $\mathbb{R}$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ con la suma y productos usuales.

4-. En $\mathbb{R}^3$ cualquier "recta" o cualquier "plano" que pase por el origen de coordenadas. Ejemplo:

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + x = 0\}$$

5-. Dado $\mathbb{R}$ el cuerpo de los reales (o cualquier cuerpo $\mathbb{K}$), el anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ (en $\mathbb{K}$).

6-. El conjunto de sucesiones de números reales es un espacio vectorial real.

7-. Si $[a, b]$ es un intervalo de $\mathbb{R}$. El conjunto de aplicaciones continuas de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real.

8-. El conjunto de las matrices de tamaño $n \times m$ sobre los reales es un espacio vectorial real.

2.3 PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS VECTORIALES. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $u, v \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Entonces:

(i) $0v = \overline{0}$.

(ii) $\lambda\overline{0} = \overline{0}$.

(iii) $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v)$.

(iv) $\lambda v = \overline{0}$ implica que $\lambda = 0$ o $v = \overline{0}$.

(v) $\lambda v = \lambda u$ y $\lambda \neq 0$ implica que $u = v$.

(vi) $\lambda v = \mu v$ y $v \neq \overline{0}$ implica que $\lambda = \mu$.

Demo:(i). Vamos a jugar con el hecho de que $0 + 0 = 0$ y la propiedad (2.2).

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$$

por tanto, si restamos en ambos lados $0v$, es decir, sumamos el opuesto de $0v$, y aplicamos la propiedad asociativa, tenemos que:

$$0 = 0v + (-0v) = (0v + 0v) + (-0v) = 0v + (0v + (-0v)) = 0v + \overline{0} = 0v.$$

(ii). Es una demostración bastante simétrica. Vamos a jugar con el hecho de que $\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$ y la propiedad (2.1).

$$\lambda\overline{0} = \lambda(\overline{0} + \overline{0}) = \lambda\overline{0} + \lambda\overline{0}$$

por tanto, si restamos en ambos lados $-\lambda\overline{0}$, es decir, sumamos el opuesto de $\lambda\overline{0}$, y aplicamos la propiedad asociativa, tenemos que:

$$\overline{0} = \lambda\overline{0} + (-\lambda\overline{0}) = (\lambda\overline{0} + \lambda\overline{0}) + (-\lambda\overline{0}) = \lambda\overline{0} + (\lambda\overline{0} + (-\lambda\overline{0})) = \lambda\overline{0}$$

(iii). (iv). (v) y (vi) pueden ser encontrados en [3, Teorema 3.1]. ■

3. SUBESPACIO VECTORIAL

3.1 DEF: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que un subconjunto W de V es un subespacio vectorial de V, y lo denotaremos $W \leq V$, si W con la suma y el producto inducido tiene estructura de espacio vectorial.

Nota: Tenemos entonces que para que un subconjunto W de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ sea un subespacio vectorial debe de cumplir:

$\star$ La suma de V tiene sentido en W. Es decir, al sumar vectores de W no nos "salimos" de W:

$$\forall\ w_1, w_2 \in W \quad \Longrightarrow \quad w_1 + w_2 \in W$$

$\star$ La multiplicación de V tiene sentido en W. Es decir, al multiplicar un escalar de $\mathbb{K}$ por un vector de W no nos "salimos" de W:

$$\forall\ w \in W,\ \lambda \in \mathbb{K} \quad \Longrightarrow \quad \lambda w \in W$$

Y además se verifiquen las 8 propiedades de espacio vectorial, a saber:

Respecto de la suma:

(1.1) Propiedad asociativa: $(w_1 + w_2) + w_3 = w_1 + (w_2 + w_3) \quad \forall\ w_1, w_2, w_3 \in W$.

(1.2) Existencia de elemento neutro, es decir, exista un elemento en W que haga de neutro.

(1.3) Existencia de elemento opuesto, es decir, para cada elemento de W exista otro elemento de W que haga de neutro.

(1.4) Propiedad conmutativa: $w_1 + w_2 = w_2 + w_1 \quad \forall\ w_1, w_2 \in W$.

Respecto del producto por escalares tenemos: si $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ y $w_1, w_2 \in W$,

(2.1) $\lambda(w_1 + w_2) = \lambda w_1 + \lambda w_2$.

(2.2) $(\lambda + \mu)w_1 = \lambda v + \mu w_1$.

(2.3) $1w_1 = w_1$.

(2.4) $\lambda(\mu w_1) = (\lambda\mu)w_1$.

Nota: La idea de que W sea subespacio vectorial es que podamos restringir las operaciones de V a W y con estas operaciones W tenga estructura de espacio vectorial.

No obstante, la propiedad (2.3) se verifica para todo elemento de V, por tanto también se verificará para todo elemento de W. Por la misma razón siempre se verifican: (1.1), (1.4), (2.1), (2.2) y (2.4). Es más, si suponemos que se verifican (1) y (2), y $W \neq \emptyset$, dado $w \in W$ y $0 \in \mathbb{F}$, por (2), $0w = \overline{0} \in W$, con lo que si que existe el elemento neutro en W, es más, es el mismo que en V. Y $(-1)w = -w \in W$, con lo también tenemos el opuesto de cada elemento de W. Por tanto, y resumiendo la información tenemos:

3.2 Teorema. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea W un subconjunto de V. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) W es un subespacio vectorial de V.

(2) i-. $W \neq \emptyset$.

ii-. Para todos $w_1, w_2 \in W$ se tiene que $w_1 + w_2 \in W$.

iii-. Para todos $w \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene que $\lambda w \in W$.

(3) i-. $W \neq \emptyset$.

ii-. Para todos $w_1, w_2 \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene que $\lambda w_1 + w_2 \in W$.

3.3 Lema. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio vectorial de V. Entonces V y W tienen el mismo elemento neutro para la suma, es decir, $\overline{0} \in W$.

3.4 Ejemplos.

1-. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces tenemos los subespacios triviales: $\{\overline{0}\}$ y V.

2.- Dado un $v \in V$ tenemos que $\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ es un subespacio vectorial.

3-. Sea $\mathbb{R}^3$ con las operaciones usuales de suma y producto por escalares. Entonces

$$W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio vectorial.

4-. Sea $\mathbb{R}^4$ con las operaciones usuales de suma y producto por escalares. Entonces

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

4. OPERACIONES CON SUBESPACIOS

En este apartado vamos a obtener nuevos subespacios vectoriales a partir de un otros dados.

4.1 Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_1, W_2 dos subespacios de V. Nos planteamos encontrar un nuevo subespacio de V que sea el más grande contenido tanto en W_1 como en W_2.

Es claro que el conjunto más grande contenidos en ambos es la intersección. Veamos que éste es a la vez el subespacio mayor.

4.2 Proposición. La intersección de dos subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

Demo. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_1, W_2 dos subespacios de V. Dados $w_1, w_2 \in W_1 \cap W_2$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que $\lambda w_1 + w_2 \in W_1$, ya que éste es un subespacio (de igual forma $\lambda w_1 + w_2 \in W_2$) por lo que $\lambda w_1 + w_2 \in W_1 \cap W_2$, lo que demuestra que $W_1 \cap W_2$ es un subespacio vectorial de V. ■

Este mismo resultado se tiene para una familia arbitraria de subespacios.

4.3 Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_i una familia de subespacios vectoriales de V, con $i \in I$. Entonces $\cap_{i\in I} W_i$ es un subespacio vectorial de V. Es más $\cap_{i\in I} W_i$ es el subespacio mayor de V contenido en todos los W_i.

4.4 Cabe preguntarse ahora la pregunta “dual”. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_1, W_2 dos subespacios de V. Nos planteamos encontrar un nuevo subespacio de V que sea el más pequeño que contiene tanto a W_1 como a W_2. Cabría pensar que este es la unión, pero no es cierto. Veamos un contraejemplo:

$\star$ En $\mathbb{R}^2$ consideramos $W_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ tenemos que $(1, 0) \in W_1 \cup W_2$, $(0, 1) \in W_1 \cup W_2$ pero $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \notin W_1 \cup W_2$

4.5 La suma de subespacios: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_1, W_2 dos subespacios de V. Se define la *suma* de W_1 y W_2, que se representa por $W_1 + W_2$ como el conjunto

$$W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

es decir, el conjunto de todos los vectores de V que se pueden expresar como suma de un vector de W_1 y un vector de W_2.

4.6 PROPOSICIÓN. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_1, W_2 dos subespacios de V. Entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio de V. Es más, $W_1 + W_2$ es el menor subespacio de V que contiene tanto a W_1 como a W_2.

4.7 Si nos encontramos con una familia de subespacios, también podemos construir este subespacio. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_i, con $i \in I$, una familia de subespacios de V. Se define la suma de los W_i que representamos por $\sum W_i$ como:

$$\sum W_i = \{\sum w_i \mid \text{con } w_i \in W_i, i \in I, \text{ todos nulos, salvo un número finito}\}$$

Nos encontramos aquí también, que $\sum W_i$ es el menor subespacio de V que contiene a todos los W_i.

4.8 Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_1, con $i \in I$, una familia de subespacios de V. Diremos que la suma de los W_i es directa si:

$$(\sum_{i \in I - \{k\}} W_i) \cap W_k = 0 \quad \forall\, k \in I.$$

5. BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

En este apartado vamos a introducir el concepto de base en un espacio vectorial. Vamos a dar distintas caracterizaciones de base y vamos a demostrar, haciendo uso del Lema de Zorn, que todo espacio vectorial posee una base.

5.1 Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea S un subconjunto de V. Nos planteamos ahora encontrar el menor subespacio de V que contiene a S (antes buscábamos el menor subespacio que contenía a una serie de subespacios). Caso de que exista, lo denotaremos por $< S >$, llamado el subespacio generado por S.

5.2 PROPOSICIÓN. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea S un subconjunto de V. Entonces existe el subespacio generado por S.

Demo: Consideremos $\Delta = \{W_i \mid W_i \text{ subespacio de } V \text{ que contiene a } S\}$ (indizado en el conjunto I) el conjunto de todos los subespacios de V que contienen a S. Δ es no vacío, ya que $V \subset \Delta$. Consideremos $W := \cap_{i \in I} W_i$, la intersección de todos los subespacios de V que contienen a S. Es claro que W es un subespacio de V (la intersección de subespacios es un subespacio) que contiene a S y claramente si U es un subespacio de V que contiene a S, $U \in \Delta$ y por tanto $W \subset U$, por lo que W es el menor. ■

La proposición anterior nos demuestra que el subespacio generado por cualquier conjunto S siempre existe. No obstante no nos da un camino para averiguar quién es. Veamos que podemos construir de forma explícita el subespacio vectorial generado por un conjunto S.

5.3 Def: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea S un subconjunto de V. Se define una combinación lineal de elementos de S como cualquier expresión:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \quad \text{con} \quad v_i \in S, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

En ocasiones también se le denomina combinación lineal al vector v que define la combinación lineal, $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k$.

Nota 1: Observar que siempre podemos considerar que en una combinación lineal no se repiten vectores de S, ya que en caso de que se repitieran por las propiedades de espacio vectoriales, los podríamos agrupar (propiedad segunda de la operación externa).

Nota 2: De ahora en adelante, cuando nos interese, supondremos que en una combinación lineal no se repiten los elementos.

5.4 Lema. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio de V. Entonces toda combinación lineal de elementos de W pertenece a W.

5.5 Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea S un subconjunto de V. Entonces $< S >$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S.

Demo: Sea U el conjunto de todas las combinaciones lineales. Es trivial que la suma de dos combinaciones lineales y que el producto de un escalar por una combinación lineal es una combinación lineal. Por tanto U es un subespacio de V. Es más, si W es un subespacio de V que contiene a S y $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k$ es una combinación lineal de elementos de $S \subset W$, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \in W$

(por el lema anterior). Por tanto $U \subset W$ lo que demuestra que U es el menor subespacio de V que contiene a S, es decir, $U =< S >$. ■

5.6 Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que un subconjunto G es un *sistema de generadores* de V si $< G >= V$.

5.7 Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que un subconjunto S es un conjunto de vectores *linealmente independientes* de V si para todos $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ distintos, y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \ldots + \lambda_k s_s = 0$$

se tiene que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Es decir, la única combinación lineal de elementos de S que es nula es la que tiene todos los escalares cero. Un conjunto de vectores S que no sea linealmente independiente se dirá que es *linealmente dependiente.*

5.8 Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea S un subconjunto de V. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) S es un conjunto de vectores independientes.

(ii) Para cada $s \in S$ se tiene que $s \notin < S - \{s\} >$.

Demo: Nombremos los elementos de $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m, \ldots\}$. Supongamos que existen unos escalares, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{F}$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v = 0.$$

Tenemos dos posibilidades:

(a). Si $\lambda_{n+1} \neq 0$. Entonces, si despejamos $\lambda_{n+1} v$ tenemos:

$$\lambda_{n+1} v = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_n$$

y si ahora multiplicamos toda la igualdad por λ_{n+1}^{-1} tenemos que:

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} v_n$$

una contradicción ya que v no era combinación lineal de elementos de S. Por tanto, este caso (a) no puede darse.

(b). Tenemos entonces que $\lambda_{n+1} = 0$. Pero entonces la combinación lineal anterior es: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, lo que implica, al ser S un conjunto de vectores independientes, que $\lambda_i = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por tanto TODOS los escalares son cero, lo que prueba que $S \cup \{v\}$ es un conjunto de vectores independientes. ■

Nota: Observar que esta proposición nos dice que si un conjunto de vectores linealmente independiente de V no genera todo V, podemos añadir un nuevo vector y tener un nuevo conjunto de vectores linealmente independientes mayor.

5.9 LEMA. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea S un conjunto de vectores independientes de V y G un conjunto de generadores de V. Entonces:

(i) $\overline{0} \notin S$.

(ii) Si $S' \subset S$, entonces S' es un conjunto de vectores linealmente independientes de V.

(iii) Si $G \subset G'$, entonces G' es un conjunto de generadores de V.

Demo: (i) es trivial.

En primer lugar vamos a nombrar los elementos de cada uno de estos conjuntos. Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ y $T = \{\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$

(ii). Consideremos una combinación lineal de elementos de S igual a cero, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$, con $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Tenemos que demostrar que la única posibilidad para que esto suceda es que todos los escalares son nulos. Consideremos entonces una combinación lineal de elementos de T simplemente sumando el vector nulo de la siguiente forma, $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k + 0 v_{k+1} + \ldots + 0 v_n$. Aplicando ahora que T es un conjunto de vectores independientes tenemos que $\lambda_i = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, lo que demuestra el apartado.

(iii). Se deja como ejercicio. ■

5.10 DEF: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que un subconjunto B de V es una *base* de V si es un conjunto de generadores de V que es linealmente independiente.

Nota: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $B = \{e_i\}_{i \in I}$ una base de V (puede que infinita). Tenemos entonces que todo elemento de V se escribe como combinación lineal de elementos de B. Por tanto para cada $v \in V$ existen unos elementos de B, $e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, \ldots, e_{\alpha_n} \in B$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{\alpha_i}$. Para no preocuparnos de cuáles serán los elementos de B que entrarán en la combinación lineal de un v, escribiremos

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

y supondremos casi todos los λ_i son ceros (todos menos un número finito). No son cero exactamente los de la combinación lineal que nos daba v.

5.11 EJEMPLOS:

i) Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y consideremos $\mathbb{K}^n$ con su suma y producto usual. Entonces

$$B = \{(1, 0, \ldots, 0, 0), (0, 1, \ldots, 0, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$$

es base de $\mathbb{K}^n$, llamada la base canónica de $\mathbb{K}^n$.

ii) Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los reales y $\mathbb{R}[X]$ el espacio vectorial de los polinomios reales. Entonces B es base de $\mathbb{R}[X]$

$$B = \{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\}$$

iii) No se conoce ninguna base para el espacio vectorial de las sucesiones de números reales.

iv) No se conoce ninguna base de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

5.12 TEOREMA. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea B un subconjunto de V. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) B es una base de V.

(ii) B es un subconjunto maximal de vectores independientes de V.

(iii) B es un conjunto minimal de generadores de V.

Demo. ∎

5.13 TEOREMA. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea S un conjunto de vectores independientes de V y G un sistema de generadores de V tales que $S \subset G$. Entonces existe una base B de V tal que $S \subset B \subset G$.

5.14 Para demostrar este teorema tenemos que hacer uso del Lema de Zorn. Por ello vamos a recordar algunas nociones:

Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Se dice que un subconjunto Y de X es una *cadena* si es un subconjunto totalmente ordenado de X. Se dice que un conjunto ordenado $(X, \leq)$ es *inductivo* si X es no vacío y toda cadena de X admite elemento maximal.

5.15 Lema de Zorn. Todo conjunto inductivo posee elementos maximales.

Nota: Aunque se le llame Lema de Zorn, realmente no es un lema, ya que no posee demostración, sino que es un axioma "hay matemáticos que se lo creen (muchos) y matemáticos que no se lo creen (pocos)". Si se ha demostrado que este axioma es equivalente al Lema de Zermelo, al axioma de elección o al hecho de que un producto infinito de conjuntos no vacíos es un conjunto no vacío.

Demo de 5.13 Consideremos Δ el conjunto de todos los subconjuntos linealmente independientes de X que contienen a S y están contenidos en G. Es decir:

$$\Delta = \{S' \subset X \mid S \subset S' \subset G \text{ y } S' \text{ es un conjunto de vectores independientes de } V\}$$

$\star$ Tenemos que Δ es claramente un conjunto ordenado por la inclusión. Es más, es no vacío ya que $S \in \Delta$

$\star$ Veamos que es un conjunto inductivo: Sean $\{S_i'\}_{i\in I}$ una cadena en Δ. Consideremos $S' = \cap_i S_i'$. Veamos que S' es un elemento maximal para la cadena: por reducción al absurdo, si S' fuera linealmente dependientes, existirían $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $\S'$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $\sum \lambda_i x_i = 0$ con algún $\lambda_i \neq 0$ pero al ser $\{S_i'\}_{i\in I}$ una cadena existe un i tal que $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S_i'$ lo que es una contradicción. Por tanto S' es un conjunto de vectores independientes, que contiene a S y está contenido en G, es decir, $S' \in \Delta$ es un mayorante para la cadena.

$\star$ Por el Lema de Zorn, sea B un elemento maximal en Δ. Veamos que B es una base para V. Por definición es un conjunto de vectores independientes. Por otro lado, supongamos que existe un elemento de $g \in G$ que no pertenece a $< B >$, entonces $S' \cup \{g\}$ sería un conjunto de elementos independientes, lo que nos lleva a contradicción con la maximalidad de S'. Por tanto $G \subset< B >$ y así, $V =< G >\subset< B >\subset V$, por lo que $V =< B >$ como queríamos demostrar. ■

5.16 Corolario. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces:

(i) Todo conjunto de vectores independientes se puede completar hasta obtener una base de V.

(ii) Todo conjunto de generadores de V contiene una base de V.

Nota: Después de este corolario, la Proposición 5.12 tiene una demostración mucho más fácil (trivial).

5.17 PROPOSICIÓN. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $B = \{e_i\}_{i\in I}$ una base de V. Entonces para cada $v \in V$ existe sólo una combinación lineal de elementos de B que da v.

Demo: Por la propia definición de base sabemos que cada vector de V se escribe como combinación lineal de elementos de B. Veamos que esta combinación lineal es única. Supongamos que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = \sum_{i\in I} \mu_i e_i,$$

Recordamos que sólo un número finito de escalares son no nulos. Entonces tenemos que $\sum_{i\in I}(\lambda_i - \mu_i)e_i = 0$ y al ser B una familia de vectores linealmente independientes, $\lambda_i = \mu_i$. ■

5.18 DEF: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $B = \{e_i\}_{i\in I}$ una base de V. Supongamos que I es un conjunto totalmente ordenado. Se define las coordenadas de un vector v respecto de la base "ordenada" B como $(\lambda_i)_{i\in I}$ con $\lambda_i \in \mathbb{K}$ (casi todos nulos) tales que $v = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.

5.19 EJEMPLOS:

1-. Sea $\mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Entonces dado un vector $v = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ se tiene que sus coordenadas respecto de B son $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

2-. Sea $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$. Entonces las coordenadas del vector $(7, 5, 3)$ respecto de B' son $(3, 2, 2)$, ya que

$$(7, 5, 3) = 3(1, 1, 1) + 2(1, 1, 0) + 2(1, 0, 0)$$

Nota: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $B = \{e_i\}_{i\in I}$ una base de V. Si las coordenadas de un vector v respecto de B son $(\lambda_i)_{i\in I}$, por definición, el vector $v = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.

6. DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL.

En esta sección vamos a demostrar que el número de elementos de una base en un espacio vectorial V es un invariante del espacio vectorial.

6.1 Teorema de Steinitz 1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $B = \{e_i\}_{i\in I}$ una base y v un vector no nulo de V con coordenadas respecto de B, $(\lambda_i)_{i\in I}$. Entonces para cada $k \in I$ tal que $\lambda_k \neq 0$ se tiene que si cambiamos e_k por v obtenemos una nueva base de V, es decir:

$$\text{Si} \quad \lambda_k \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad B' = (B - \{e_k\}) \cup \{v\} \quad \text{es una nueva base de } V.$$

Demo. Vamos a empezar suponiendo que $k = 1$ en caso contrario reordenamos la base B y colocamos el vector e_k en primer lugar. Sabemos que $v = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$, por lo que, como ya sabemos, podemos despejar e_1:

$$e_1 = v - \sum_{i>1} \lambda_1^{-1} \lambda_i e_i$$

$\star$ Veamos que B' es un conjunto de vectores independientes, si

$$0 = \mu_1 v + \sum_{i>1} \mu_i e_i = \sum_{i\in I} \mu_1 \lambda_i e_i + \sum_{i>1} \mu_i e_i = \mu_1 \lambda_1 e_1 + \sum_{i>1} (\mu_1 \lambda_i + \mu_i) e_i$$

Como B es una base de V, todos los coeficientes son cero. Así, $\mu_1 \lambda_1 = 0$, y como$\lambda_1 \neq 0$, $\mu_1 = 0$ y entonces $\mu_1 \lambda_i + \mu_i = 0$ implica $\mu_i = 0$ para todo $i \in I$. Es decir B' es un conjunto de vectores independientes de V.

$\star$ Veamos que B' es un sistema de generadores de V. Dado $w \in V$, como B es una base de V existen $\gamma_i \in \mathbb{K}$, casi todos nulos, tales que

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i\in I} \gamma_i e_i = \gamma_1 e_1 + \sum_{i>1} \gamma_i e_i = v - \sum_{i>1} \gamma_1 \lambda_1^{-1} \lambda_i e_i + \sum_{i>1} \gamma_i e_i \\ &= v + \sum_{i>1} (\gamma_i - \gamma_1 \lambda_1^{-1} \lambda_i) e_i \in < B' > \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el Teorema ■

6.2 Teorema de Steinitz 2. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, sea $B = \{e_i\}_{i\in I}$ una base y $X = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ un conjunto de vectores independientes de V. Entonces existen n elementos de B tales que si cambiamos estos elementos por X obtenemos una nueva base de V.

Demo. Vamos a hacer la demostración por inducción a n.

Si $n = 1$ tenemos que $W = \{w_1\}$ un vector independiente, y por tanto no nulo, ver (5.9). Por lo que por el teorema anterior (alguna de las coordenadas de w_1 respecto de B será no nula) existe un $e_i \in B$ que al cambiarlo por w_1 nos da una nueva base.

Supongamos que el resultado es cierto para $n-1$. Si consideramos $X' = \{w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\}$, tenemos, otra vez por (5.9) que es un conjunto de vectores independientes, por lo que por la hipótesis de inducción existen $n-1$ elementos de B que al cambiarlos por X nos da otra base de V, haciendo una reordenación en B supongamos que son los $n-1$ primeros. Por tanto

$$B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, e_n, e_{n+1}, \ldots\}$$

es base de V. Sea ahora w_n

Nota: tenemos que conseguir cambiarlo por un elemento de B' distinto de $w_1, \ldots, w_{n-1}$, por lo que no podemos aplicar simplemente el caso $n = 1$. Es más, no hemos usado que X es un conjunto de vectores independientes, sólo que son vectores no nulos (si no se usan todas las hipótesis es fácil que no este bien hecho).

Como B' es base de V, sean $(\lambda_i)_{i\in I}$ las coordenadas de w_n respecto de B'.

$$w_n = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_{n-1} w_{n-1} + \lambda_n e_n + \lambda_{n+1} e_{n+1} + \ldots$$

Observar, que como X es un conjunto de vectores independientes, no puede suceder que $\lambda_s = 0$ para todo $s \geq n$ (tendríamos $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_{n-1} w_{n-1} - w_n = 0$, una combinación lineal de elementos de X nula con escalares no nulos). Por tanto, existe $\lambda_r \neq 0$ con $r \geq n$ y por el Teorema de Steinitz 1 podemos cambiar w_n por este e_r, lo que completa el Teorema. ■

6.3 TEOREMA. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces si una base de V tiene n elementos, todas las bases de V tienen n elementos.

Demo. Sea $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de V y B' otra base de V. Entonces B' es un conjunto de vectores independientes de V, por lo que si tuviera más de n elementos podríamos cambiar estos elementos por elementos de B, lo cual es absurdo. Por tanto $\#B' \leq \#B$. Como ahora B' también es finita, aplicando el mismo resultado $\#B \leq \#B'$. Por lo que $\#B' = \#B$. ■

Este mismo teorema es cierto para bases con cualquier cardinal, aunque las técnicas son distintas y no vamos a demostrarlo.

6.4 TEOREMA. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces si una base de V tiene cardinal $\mathcal{X}$, todas las bases de V tienen cardinal $\mathcal{X}$.

6.5 DEF: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se define la *dimensión* de V y se representa por $\dim_{\mathbb{K}} V$ como el cardinal de cualquier base de V.

6.6 EJEMPLOS:

1-. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $(\mathbb{K}^n, +, \ )$ con su estructura usual de $\mathbb{K}$ espacio vectorial. tenemos entonces que una base de $\mathbb{K}^n$, la base canónica, es

$$B = \{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\}$$

por tanto $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$.

2-. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y consideremos V el espacio vectorial de las matrices de tamaño $n \times m$ sobre $\mathbb{K}$. Entonces $\dim_{\mathbb{K}}(V) = nm$.

3-. Sea $V = \mathbb{K}_n[X]$ el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a n. Entonces $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n$. Una base $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$.

4-. Hay que tener cuidado, ya que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ pero $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. Es decir, $\mathbb{C}$ considerado como $\mathbb{C}$ espacio vectorial tiene dimensión 1, mientras que $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ tiene dimensión 2.

5-. $V = \mathbb{K}[X]$ el espacio vectorial de los polinomios reales tiene dimensión numerable, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X]) = \aleph_0$

6-. $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre los racionales $\mathbb{Q}$ tiene dimensión $\aleph_1$, es decir, tiene cardinal no numerable.

Nota: Aunque no se conoce ninguna base de $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, si se conoce su dimensión, $\aleph_1$.

7-. El espacio vectorial de todas las sucesiones de números reales también tiene dimensión $\aleph_1$.

6.7 PROPOSICIÓN. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $W \leq V$. Supongamos que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Entonces $\dim_{\mathbb{K}}(W) \leq n$ y se da la igualdad si y sólo si $V = W$.

7. ECUACIONES DE UN SUBESPACIO.

7.1 Sea V el espacio vectorial $(\mathbb{K}^n, +, \ )$ con su suma y producto usual y sea W un subespacio de W. Sabemos que W tiene una base con menos de n elementos, por tanto tiene sistemas de generadores un número finito de elementos. Sea $G = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ un sistema de generadores de W.

$$w_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), w_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, w_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$$

$\star$ Se definen las *ecuaciones vectoriales* para W como la expresión:

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \lambda_1(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) + \lambda_2(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) + \ldots + \\ + \ldots + \lambda_k(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$$

Nota: Todo vector de W se pone como combinación lineal de elementos de G, por lo que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ representa cualquier vector de W cuando $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ se van sustituyendo por valores de $\mathbb{K}$.

$\star$ Se definen las *ecuaciones paramétricas* para W como la expresión:

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_k a_{k1} \\ X_2 &= \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_k a_{k2} \\ &\vdots \\ X_n &= \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \ldots + \lambda_k a_{kn} \end{aligned}$$

$\star$ Si en las expresión anterior vamos despejando los parámetros y sustituyéndolos en las demás expresiones, es decir, vamos “deshaciéndonos” de los parámetros, nos encontramos con las *ecuaciones continuas* para W.

$\star$ Una expresión “bonita” de la anterior se la denomina *ecuaciones cartesianas* de W.

Nota: Como claramente no ha quedado claro, veamos un ejemplo:

$\diamondsuit$ Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los reales y consideremos W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\{(1, 2, 3), (1, 1, 0), (0, 1, 3)\}$. Entonces:

$\star$ Ecuaciones vectoriales:

$$(x, y, z) = \lambda(1, 2, 3) + \mu(1, 1, 0) + \gamma(0, 1, 3)$$

$\star$ Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= \lambda + \mu \\ y &= 2\lambda + \mu + \gamma \\ z &= 3\lambda + \quad + 3\gamma \end{aligned}$$

$\star$ Ecuaciones continuas: Despejamos λ de la primera ecuación $\lambda = x - \mu$ y sustituimos en las demás ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= 2x - \mu + \gamma \\ z &= 3x - 3\mu + 3\gamma \end{aligned}$$

despejamos μ en la primera ecuación, $\mu = 2x + \gamma - y$ y sustituimos en la última ecuación

$$z = 3x + 3y - 6x - 3\gamma + 3\gamma$$

en este punto, o antes, deben de desaparecer los parámetros, por lo que

$$z = -3x + 3y \qquad \text{Ecuación continua.}$$

$\star$ Si lo trasladamos todo a un lado se le denomina ecuaciones cartesianas

$$3x - 3y + z = 0$$

Nota: En la primera ecuación (x, y, z) recorría todos los vectores de W, por lo que en la última ecuación lo que obtenemos es la relación existente entre x, y, z para que el vector $(x, y, z) \in W$. Así,

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 3y + z = 0\}$$

$\diamondsuit$ Sea $(\mathbb{R}^4, +, \ )$ con la suma y producto usuales y sea U el subespacio de V generado por $\{(4, 0, 6, 2), (6, 0, 9, 3)\}$.

$\star$ Ecuaciones vectoriales de U

$$(x, y, z, t) = \lambda(4, 0, 6, 2) + \mu(6, 0, 9, 3)$$

$\star$ Ecuaciones paramétricas de U:

$$\begin{aligned} x &= 4\lambda + 6\mu \\ y &= 0 \\ z &= 6\lambda + 9\mu \\ t &= 2\lambda + 3\mu \end{aligned}$$

$\star$ Ecuaciones continuas de U: despejamos λ de la primera ecuación y sustituimos en las demás, $\lambda = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}\mu$

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ z &= \frac{3}{2}x - \frac{18}{2}\mu + 9\mu = \frac{3}{2}x \\ t &= \frac{1}{2}x - \frac{6}{2}\mu + 3\mu = \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Se han ido ya todos los parámetros, por lo que éstas son las ecuaciones continuas.

$\star$ Ecuaciones cartesianas: $y = 0;\ 3x - 2z = 0;\ x - 2t = 0$.

Por tanto $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0;\ 3x - 2z = 0;\ x - 2t = 0\}$. En este caso, U queda definido por un sistema de tres ecuaciones lineales.

BIBLIOGRAFÍA

[1] **F. M. Hall:** "An introduction to Abstract Algebra", *Cambridge University Press*, 1980.

[2] **M. Spivak:** "Calculus, Cálculo Infinitesimal", *Editorial Reverte, S. A.*, 1992.

[3] **P. Alberca, D. Martín:** "Métodos Matemáticos", *Ediciones Aljibe*, 2001.