Tema 3.

1. INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a estudiar aplicaciones entre espacios vectoriales. Resultados relevantes y que han de saberse son:

$\star$ La forma de "fabricar" aplicaciones lineales, y el hecho básico de que una aplicación lineal queda determinada una vez que se conoce la imagen de una base.

$\star$ Cálculo de la matriz asociada a un cambio de base y como ésta es una matriz inversible. Es importante el hecho de que esta matriz transforma las coordenadas de un vector respecto de la primera base en coordenadas de ese mismo vector respecto de la segunda base.

$\star$ Calculo de la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de dos bases. Es importante el hecho de que esta matriz transforma las coordenadas de un vector respecto de la primera base en las coordenadas de la imagen de este vector respecto de la segunda base.

$\star$ La relación existente entre dos matrices asociadas a una misma aplicación lineal entre distintas bases.

$\star$ Calcular el rango de una aplicación lineal y de una matriz.

$\star$ Comprender la estructura del espacio vectorial producto directo, suma directa, espacio vectorial cociente y espacio vectorial dual, así como sus propiedades fundamentales.

2. APLICACIONES LINEALES

2.1 Def: Sean U y V dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : U \to V$ una aplicación. Se dice que f es una **aplicación lineal** si verifica:

(1) $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$ para todo $u_1, u_2 \in U$.

(2) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $u \in U$.

2.2 Ejemplos:

$\star$ Sean U y V dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces la aplicación constante a cero es una aplicación lineal: sea $f : U \to V$ tal que $f(u) = \overline{0}$

para todo $u \in U$. Entonces

$$\begin{aligned} f(u_1)+f(u_2) &= \overline{0}+\overline{0}=\overline{0}=f(u_1+u_2) \\ \lambda f(u) &= \lambda\overline{0}=\overline{0}=f(\lambda u). \end{aligned}$$

$\star$ Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (x+y, 2x+y-z)$.

$$\begin{aligned} f(x,y,z)+f(a,b,c) &= (x+y,2x+y-z)+(a+b,2a+b-c) \\ &= (x+y+a+b, 2x+y-z+2a+b-c); \\ f((x,y,z)+(a,b,c)) &= f(x+a,y+b,z+c) \\ &= (x+a+y+b, 2(x+a)+y+b-z-c). \end{aligned}$$

Luego $f(x,y,z)+f(a,b,c) = f((x,y,z)+(a,b,c))$, y

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y,z)) &= f(\lambda x,\lambda y,\lambda z) = (\lambda x+\lambda y, 2\lambda x+\lambda y-\lambda z); \\ \lambda f(x,y,z) &= \lambda(x+y,2x+y-z) = (\lambda x+\lambda y, 2\lambda x+\lambda y-\lambda z). \end{aligned}$$

Luego $f(\lambda(x,y,z)) = \lambda f(x,y,z)$, lo que implica que f es una aplicación lineal.

$\star$ Sean $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$ espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Consideremos $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces la aplicación $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

es una aplicación lineal. Es claro, ya que por las propiedades del producto de matrices tenemos que:

$$\begin{aligned} f((x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)) &= f(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n) \\ &= A\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+f(y_1,y_2,\ldots,y_n) \end{aligned}$$

y

$$f(\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = A \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Luego es una aplicación lineal.

2.3 PROPOSICIÓN. Sean U y V dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : U \to V$ una aplicación lineal. Entonces:

(i) $f(\overline{0}) = \overline{0}$.

(ii) $f(-u) = -f(u)$.

(iii) $f(u_1 - u_2) = f(u_1) - f(u_2)$

(iv) $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \ldots + \lambda_n f(u_n)$

Demo: (i). $f(\overline{0}) = f(0.\overline{0}) = 0.f(\overline{0}) = \overline{0}$.

Las demás propiedades se siguen de la definición. ■

2.4 DEF: Sean U y V dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : U \to V$ una aplicación lineal. Entonces:

- ⋆ Si f es inyectiva se dice que f es un **monomorfismo** de espacios vectoriales.
- ⋆ Si f es sobreyectiva se dice que f es un **epimorfismo** de espacios vectoriales.
- ⋆ Si f es biyectiva se dice que f es un **isomorfismo** de espacios vectoriales.
- ⋆ A una aplicación lineal $f : V \to V$ se la denomina un **endomorfismo** (es decir, si tiene el mismo dominio que co-dominio).
- ⋆ Un endomorfismo biyectivo se le denomina un **automorfismo**.

2.5 Diremos que dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ son **isomorfos** si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $f : V \to W$.

Nota: Observar que entonces V y W son el "mismo" espacio vectorial, la única diferencia entre ellos es el nombre de sus elementos.

3. NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL.

Asociada a una aplicación lineal $f : U \to V$ nos vamos a encontrar varios subespacios interesantes:

3.1 PROPOSICIÓN. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Sea X un subconjunto de V. Entonces

$$f(< X >) =< f(X) >,$$

en donde <—> denota el subespacio generado por "—".

Demo. Sea $v \in< X >$, tenemos entonces que existen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$, por lo que

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \in< f(X) > \end{aligned}$$

Luego $f(< X >) \subset< f(X) >$. Por otro lado, si $f(v) \in< f(X) >$ existen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \\ &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) = f(< X >) \end{aligned}$$

Por lo que $< f(X) >\subset f(< X >)$, y tenemos la igualdad. ■

3.2 PROPOSICIÓN. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Sea U un subespacio de V, entonces $f(U)$ es un subespacio de W.

3.3 DEF: Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Se define la **imagen** de f y se representa por $Im(f)$ como $f(V)$.

Nota: Observar que la imagen de una aplicación lineal es un subespacio del codominio de f, en este caso W.

3.4 PROPOSICIÓN. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Sea U un subespacio de W, entonces

$$f^{-1}(U) = \{v \in V \mid f(v) \in U\}$$

es un subespacio de V.

Demo: dados $u_1, u_2 \in f^{-1}(U)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 \in f^{-1}(U) &\qquad \text{ya que} \qquad f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) \in U \\ \lambda u_1 \in f^{-1}(U) &\qquad \text{ya que} \qquad f(\lambda u_1) = \lambda f(u_1) \in U \end{aligned}$$ ■

3.5 Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Se define el **núcleo** de f y se representa por $Ker(f)$ como:

$$Ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\} = f^{-1}(0)$$

Nota: por la proposición anterior, el núcleo de una aplicación lineal es un subespacio de V.

3.6 Ejemplo: Consideremos la aplicación lineal del ejemplo 2.2, es decir, sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, 2x + y - z)$. Entonces

$$Ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ | f(x, y, z) = (0, 0)\}$$

Por lo que nos aparecen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

si las resolvemos: $x = -y$ y $z = 2x + y = -2y + y = -y$. Así,

$$Ker(f) = \{(\lambda, -\lambda, -\lambda) \ |\lambda \in \mathbb{R}\} \qquad \text{y una base} \qquad \{(1, -1, -1))\}$$

3.7 Proposición. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, V y W dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces:

(i) f es inyectiva (es decir, un monomorfismo) si y sólo si $Ker(f) = 0$.

(ii) f es sobreyectiva (es decir, un epimorfismo) si y sólo si $Im(f) = W$.

Demo: (i). Supongamos que f es un monomorfismo (inyectiva). Dado $v \in Ker(f)$, tenemos, por definición de $Ker(f)$, que $f(v) = 0$. Pero también sabemos que $f(0) = 0$, por lo que $f(0) = 0 = f(v)$ lo que implica, al ser f inyectiva, que $v = 0$. Hemos demostrado que el único vector de V que está en el núcleo de f es el vector cero, es decir, $Ker(f) = 0$.

Supongamos ahora que $Ker(f) = 0$ y sean v_1, $v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = f(v_2)$. Tenemos entonces que $0 = f(v_1)-f(v_2) = f(v_1-v_2)$, por lo que $v_1-v_2 \in Ker(f) = 0$ y por tanto $v_1 = v_2$.

(ii). Es evidente. ■

4. COMO “FABRICAR” APLICACIONES LINEALES

4.1 TEOREMA. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ un conjunto de vectores de W. Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \to W$ tal que: $f(v_i) = w_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demo: Supongamos que existe una aplicación lineal que verifica que $f(v_i) = w_i$. Tenemos entonces que dado un vector $v \in V$, v se puede escribir como una única combinación lineal de elementos de B_V, por lo que existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$, así,

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_n f(v_n)$$

y por tanto sólo hay una forma de definir f, luego, de haber una aplicación lineal que verifique esto, ésta es única.

Definamos entonces la aplicación lineal así: dado $v \in V$,

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

de forma única, y por tanto podemos definir

$$f(v) := \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_n f(v_n).$$

Ahora sólo tenemos que demostrar que esta f así definida es una aplicación lineal.

Dados $v, v' \in U$ y $\gamma \in F$, existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \\ u' &= \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} v + v' &= (\lambda_1 + \mu) v_1 + (\lambda_2 + \mu_2) v_2 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) v_n \\ \gamma v &= (\gamma\lambda_1) v_1 + (\gamma\lambda_2) v_2 + \ldots + (\gamma\lambda_n) v_n \end{aligned}$$

Si aplicamos ahora nuestra definición de f:

$$\begin{aligned} f(v + v') &= f(\lambda_1 + \mu) v_1 + (\lambda_2 + \mu_2) v_2 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) v_n \\ &= (\lambda_1 + \mu) f(v_1) + (\lambda_2 + \mu_2) f(v_2) + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) f(v_n) \\ &= \lambda_1 f(vv_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n) + \mu_1 f(v_1) + \ldots + \mu_n f(v_n) \\ &= f(v) + f(v') \\ f(\gamma v) &= (\gamma\lambda_1) f(v_1) + (\gamma\lambda_2) f(v_2) + \ldots + (\gamma\lambda_n) f(v_n) = \gamma f(v). \end{aligned}$$

Por lo que queda demostrado el Teorema. ■

Nota: Si el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ no es una base no podemos afirmar que exista o que no exista una aplicación lineal que verifique el teorema anterior.

4.2 COROLARIO. Una aplicación lineal queda determinada una vez que se conoce la imagen de una base.

4.3 EJEMPLO. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Consideremos los siguientes conjuntos $B := \{(1,2,3),(1,0,2),(0,0,4)\} \subset \mathbb{K}^3$ y $\{(2,2),(4,4),(8,8)\} \subset \mathbb{K}^2$. Determinar si existe una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ tal que $f(1,2,3) = (2,2)$, $f(1,0,2) = (4,4)$ y $f(0,0,4) = (8,8)$.

En primer lugar se comprueba que B es una base: es fácil ver que es un conjunto de vectores independientes, por lo que tres vectores independientes en $\mathbb{R}^3$ son base.

En segundo lugar se escribe cualquier vector de $\mathbb{K}^3$ como combinación lineal de elementos de B.

$$(x,y,z) = \lambda(1,2,3) + \mu(1,0,2) + \gamma(0,0,4)$$

de donde:

$$\begin{aligned}
\lambda =& \frac{y}{2} \\
\mu =& x - \frac{y}{2} \\
\gamma =& \frac{z}{4} - \frac{y}{8} - \frac{x}{2}
\end{aligned}$$

Tercer paso:

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) =& f(\frac{y}{2}(1,2,3) + (x - \frac{y}{2})(1,0,2) + (\frac{z}{4} - \frac{y}{8} - \frac{x}{2})(0,0,4)) \\
=& \frac{y}{2}(2,2) + (x - \frac{y}{2})(4,4) + (\frac{z}{4} - \frac{y}{8} - \frac{x}{2})(8,8) \\
=& (2z - 2y, 2z - 2y).
\end{aligned}$$

4.4 TEOREMA. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) f es inyectiva.

(ii) $Ker(f) = \{0\}$.

(iii) Si S es un conjunto de vectores independientes de V, $f(S)$ es un conjunto de vectores independientes de W.

(iv) Si B es una base de V, $f(B)$ es un conjunto de vectores independientes de W.

(v) Existe una aplicación lineal $g : W \to V$ tal que $g \circ f = Id_V$.

4.5 TEOREMA. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) f es sobreyectiva.

(ii) $Im(f) = W$.

(iii) Si S es un sistema de generadores de V, $f(S)$ es un sistema de generadores de W.

(iv) Si B es una base de V, $f(B)$ es un sistema de generadores de W.

(v) Existe una aplicación lineal $g : W \to V$ tal que $f \circ g = Id_W$.

4.6 TEOREMA. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) f es biyectiva.

(ii) $Ker(f) = \{0\}$ y $Im(f) = W$.

(iii) Si B es una base de V, $f(B)$ es una base de W.

(iv) Existe una aplicación lineal $g : W \to V$ tal que $f \circ g = Id_W$ y $g \circ f = Id_V$.

5. MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL.

En esta sección vamos a ver que hay una relación muy estrecha entre las aplicaciones lineales y las matrices.

5.1 TEOREMA. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces la aplicación que a cada vector de V lo manda a sus coordenadas respecto de la base B es un isomorfismo de espacios vectoriales, es decir:

$$f_B : V \to \mathbb{K}^n \quad \text{definida por} \quad f(v) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

en donde $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ son las coordenadas del vector v respecto de B (es decir, $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$) es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demo: La demostración es similar a la dada en (4.1). Es más, f_B es la única aplicación lineal tal que $f_B(v_i) = e_i$, con e_i el término i-esimo de la base canónica de $\mathbb{K}^n$. ■

5.2 MATRIZ ASOCIADA A UN CAMBIO DE BASE. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean B y B' dos bases de V. Nos va a interesar ver la relación existente entre las coordenadas de un vector v respecto de la base B y las coordenadas de v respecto de la base B'.

Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ las bases anteriores. Supongamos que:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n,$$

entonces las coordenadas de v respecto de B son $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$,

y que

$$v = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_n u_n,$$

entonces las coordenadas de v respecto de B' son $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$. Veamos la relación existente entre $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ y $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$.

Escribamos cada elemento de la base de B como combinación lineal de B'.

$$\begin{aligned}
v_1 =& \lambda_{11} u_1 + \lambda_{12} u_2 + \ldots + \lambda_{1n} u_n \\
v_2 =& \lambda_{21} u_1 + \lambda_{22} u_2 + \ldots + \lambda_{2n} u_n \\
&\vdots \\
v_n =& \lambda_{n1} u_1 + \lambda_{n2} u_2 + \ldots + \lambda_{nn} u_n
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
v =& \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \\
=& \lambda_1(\lambda_{11} u_1 + \lambda_{12} u_2 + \ldots + \lambda_{1n} u_n) + \\
&+ \lambda_2(\lambda_{21} u_1 + \lambda_{22} u_2 + \ldots + \lambda_{2n} u_n) + \\
&\vdots \\
&+ \lambda_n(\lambda_{n1} u_1 + \lambda_{n2} u_2 + \ldots + \lambda_{nn} u_n)
\end{aligned}$$

Luego si lo escribimos como combinación lineal de elementos de B' tenemos que

$$\begin{aligned} v =& (\lambda_1\lambda_{11} + \lambda_2\lambda_{21} + \ldots + \lambda_n\lambda_{n1})u_1 \\ &+(\lambda_1\lambda_{12} + \lambda_2\lambda_{22} + \ldots + \lambda_n\lambda_{n2})u_2 \\ &\vdots \\ &=(\lambda_1\lambda_{1n} + \lambda_2\lambda_{2n} + \ldots + \lambda_n\lambda_{nn})u_n \end{aligned}$$

Esto tiene una representación en forma de matriz muy sencilla.

5.2.1 DEF: Definimos $C_{B'B}$ la matriz de cambio de base de la base B a la base B' como:

$$C_{B'B} := \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \ldots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \ldots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

Nota: Observar que las columnas de la matriz $C_{B'B}$ son las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base B' y que:

$$C_{B'B}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

Nota: Es decir, la matriz $C_{B'B}$ transforma las coordenadas de un vector v respecto de la base B en las coordenadas del mismo vector v respecto de la base B'.

Nota: Si calculamos $C_{B'B}$ y $C_{BB'}$ tenemos que:

$$C_{B'B}C_{BB'}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C_{BB'}C_{B'B}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

con lo que las matrices $C_{B'B}$ y $C_{BB'}$ son inversibles, con inversas la una de la otra.

5.2.2 EJEMPLO. Consideremos en $\mathbb{R}^3$, $B = \{(1,3,5),(0,0,1),(1,1,0)\}$ y $B' = \{(1,1,1),(1,2,3),(1,0,1)\}$, dos bases. Calcula la matriz de cambio de base de B a B' y la de B' a B. Primero se calculan las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base B' (se plantean los sistemas de ecuaciones y se resuelven).

$$\begin{aligned}
(1,3,5) &= (-1)(1,1,1) + 2(1,2,3) + 0(1,0,1)\\
(0,0,1) &= (-1)(1,1,1) + \frac{1}{2}(1,2,3) + \frac{1}{2}(1,0,1)\\
(1,1,0) &= 2(1,1,1) + (-\frac{1}{2})(1,2,3) + (-\frac{1}{2})(1,0,1)
\end{aligned}$$

Por tanto: $C_{B'B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Calculemos el otro cambio de base: calculamos las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B.

$$\begin{aligned}
(1,1,1) &= 0(1,3,5) + 1(0,0,1) + 1(1,1,0)\\
(1,2,3) &= \frac{1}{2}(1,3,5) + \frac{1}{2}(0,0,1) + \frac{1}{2}(1,1,0)\\
(1,0,1) &= (-\frac{1}{2})(1,3,5) + \frac{7}{2}(0,0,1) + \frac{3}{2}(1,1,0)
\end{aligned}$$

Por tanto: $C_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Nota: Observar que son matrices una inversa de la otra.

$$C_{B'B}C_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{BB'}C_{B'B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3 Matriz asociada a una aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$ respecto de las bases canónicas. Consideremos $\mathbb{K}$ un cuerpo y $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una aplicación lineal. Veamos que f puede verse como una matriz de tamaño m por n, que llamaremos la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas y que denotaremos por $A^f \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Es más, A^f no es más que las coordenadas de las imágenes de cada vector de la base canónica de R^n en columnas, es decir, si

$$\begin{aligned} f(1,0,\ldots,0) &= (\lambda_{11},\lambda_{12},\ldots,\lambda_{1m}) \\ f(0,1,\ldots,0) &= (\lambda_{21},\lambda_{22},\ldots,\lambda_{2m}) \\ \vdots \quad & \qquad \vdots \\ f(0,0,\ldots,1) &= (\lambda_{n1},\lambda_{n2},\ldots,\lambda_{nm}) \end{aligned}$$

Entonces:

$$A^f = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \ldots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{1m} & \lambda_{2m} & \ldots & \lambda_{nm} \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = A^f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

5.3.1 Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $f(x,y) = (2x+3y, x-y, 4x-y)$. Entonces la matriz asociada a f respecto de la base canónica es:

$$\begin{aligned} f(1,0) &= (2,1,4) \\ f(0,1) &= (3,-1,-1) \end{aligned} \quad \text{y} \quad A^f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x+3y, x-y, 4x-y)$, por lo que si que hemos conseguido dar a f una "forma matricial".

5.4 Matriz asociada a aplicaciones lineales generales. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal.

Sean $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V y $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ base de W y consideremos los isomorfismos:

$$f_B : V \to \mathbb{K}^n$$

que asocia a cada vector de V sus coordenadas respecto de la base B y,

$$f_{B'} : W \to \mathbb{K}^m$$

que asocia a cada vector de W sus coordenadas respecto de la base B'.

Por tanto tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_B"'] & W \arrow[d, "f_{B'}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "f_{B'} \circ f \circ f^{-1}_B"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Y la aplicación lineal

$$f_{B'} \circ f \circ f_B^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m.$$

5.4.1 DEF: Se define la matriz asociada a f respecto de las bass B y B' y se representa por $A^f_{B'B}$ como la matriz asociada a la aplicación lineal $f_{B'} \circ f \circ f_B^{-1}$.

Nota Importante: Por construcción la matriz asociada a f respecto de las bases B y B', es decir, $A^f_{B'B}$, transforma las coordenadas de un vector $v \in V$ respecto de la base B en las coordenadas de $f(v)$ en la base B'.

5.4.2 ALGORITMO: para calcular la matriz asociada a f respecto de las bases B y B'.

Se calculan las imágenes por f de los elementos de la base de B y se escriben como combinación lineal de elementos de B' (es decir, se calculan sus coordenadas respecto de B'). Es decir:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_{11}w_1 + \lambda_{12}w_2 + \ldots + \lambda_{1m}w_m \\ f(v_2) &= \lambda_{21}w_1 + \lambda_{22}w_2 + \ldots + \lambda_{2m}w_m \\ &\vdots \\ f(v_n) &= \lambda_{n1}w_1 + \lambda_{n2}w_2 + \ldots + \lambda_{nm}w_m \end{aligned}$$

Entonces estas coordenadas puestas en columnas nos dan la matriz que buscamos:

$$A^f_{B'B} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \dots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{1m} & \lambda_{2m} & \dots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

5.4.3 EJEMPLO: Se considera la aplicación lineal $f;\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x,y,z) = (2x+3y, 3y+4z, 4z+5x, x+y+z)$$

Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases

$$B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$$
$$B' = \{((1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,0),(0,0,1,1)\} \subset \mathbb{R}^4$$

Sea calcula:

$$f(1,1,1) = (5,7,9,3) = 5(1,0,0,0) + 7(0,1,1,0) + 2(0,0,1,0) + 3(0,0,0,1)$$
$$f(1,1,0) = (5,3,5,2) = 5(1,0,0,0) + 3(0,1,1,0) + 2(0,0,1,0) + 2(0,0,0,1)$$
$$f(1,0,0) = (2,0,5,1) = 2(1,0,0,0) + 0(0,1,1,0) + 5(0,0,1,0) + 1(0,0,0,1)$$

Luego la matriz asociada a f respecto de las bases B y B' es:

$$A^f_{B'B} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Si tomamos el vector $(3,2,1) \in \mathbb{R}^3$ tenemos que sus coordenadas respecto de la base B son:

$$(3,2,1) = 1(1,1,1) + 1(1,1,0) + 1(1,0,0).$$

Tenemos que las coordenadas de $f(3,2,1) = (12,10,19,6)$ respecto de la base B' son:

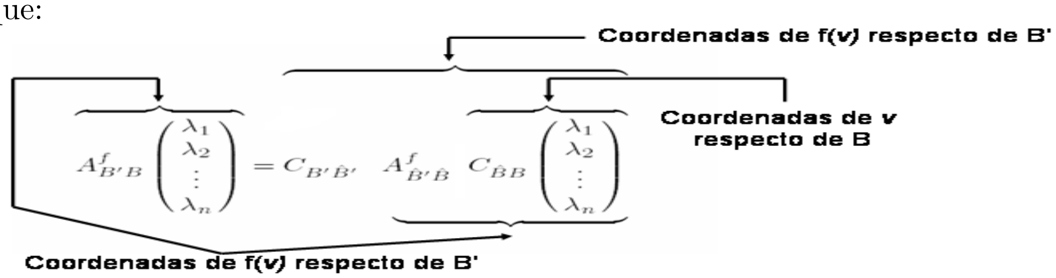
$$f(3,2,1) = 12(1,0,0,0) + 10(0,1,1,0) + 9(0,0,1,0) + 6(0,0,0,1).$$

Por tanto se tiene que:

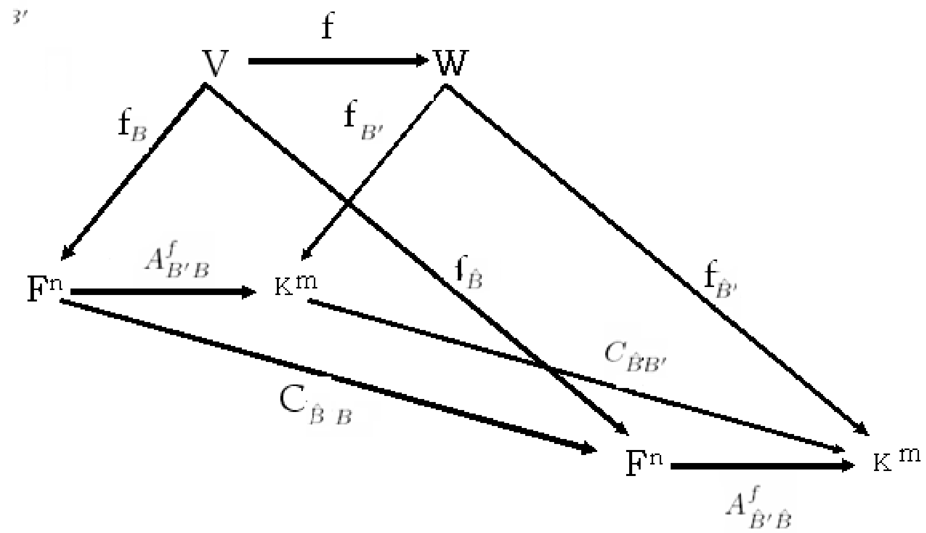
$$A^f_{B'B}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5&2\\7&3&0\\2&2&5\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\10\\9\\6\end{pmatrix}$$

Para terminar la sección vamos a estudiar que relación existe entre las matrices asociadas a una misma aplicación lineal cuando cambiamos de base.

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Sean B y $\hat{B}$ dos bases de V y B' y $\hat{B}'$ dos bases de W. Tenemos entonces $A^f_{B'B}$, la matriz asociada a f respecto de las bases B y B', y $A^f_{\hat{B}'\hat{B}}$, la matriz asociada a f respecto de las bases $\hat{B}$ y $\hat{B}'$. Nos preguntamos que relación existe entre estas matrices. La respuesta es fácil: $A^f_{B'B} = C_{B'\hat{B}'}A^f_{\hat{B}'\hat{B}}C_{\hat{B}B}$, ya que:



Todas las relaciones existentes entre las distintas aplicaciones quedan reflejadas en el siguiente diagrama conmutativo:



Nota: Recordamos que la matriz $C_{\hat{B}B}$ es inversa de la matriz $C_{B\hat{B}}$.

6. NUEVOS ESPACIOS VECTORIALES

6.1 PRODUCTO DIRECTO DE ESPACIOS VECTORIALES Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\Pi_{i\in I}V_i$ el producto cartesiano (de estos conjuntos). Entonces las siguientes operaciones (operaciones por componentes) dan estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ a $\Pi_{i\in I}V_i$, llamado el producto directo de los espacios vectoriales V_i.

$\star$ Dados $(v_i)_{i\in I}$, $(w_i)_{i\in I}$ definimos la suma como

$$(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} := (v_i + w_i)_{i\in I}$$

$\star$ Dados $(v_i)_{i\in I}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ definimos la multiplicación por escalares como:

$$\lambda(v_i)_{i\in I} := (\lambda v_i)_{i\in I}$$

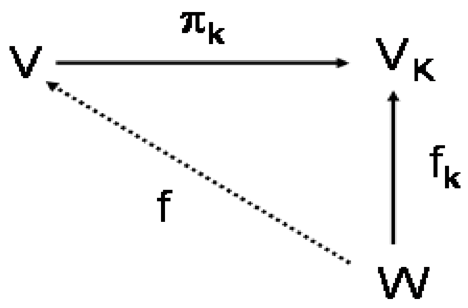
6.1.1 PROPOSICIÓN. Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces $\Pi_{i\in I}V_i$, con las operaciones anteriores, tiene estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

6.1.2 DEF: Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $V = \Pi_{i\in I}V_i$ el producto directo de los espacios vectoriales V_i. Se define la proyección "canónica" de V en V_k, con $k \in I$, como:

$$\begin{array}{rccc} \pi_k : & V & \to & V_k \\ & (v_i)_{i\in I} & \mapsto & v_k. \end{array}$$

Es fácil ver que para cada $k \in I$, π_k es un epimorfismo de espacios vectoriales.

6.1.3 PROPIEDAD FUNDAMENTAL DEL PRODUCTO CARTESIANO DE ESPACIOS VECTORIALES. Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $V = \Pi_{i\in I}V_i$ el producto directo de los espacios vectoriales V_i. Entonces para cada espacio vectorial W y cada familia de aplicaciones lineales $f_i : W \to V_i$ existe una única aplicación lineal $f : W \to V$ tal que para cada $k \in I$ el siguiente diagrama es conmutativo:



Es más, Si $\hat{V}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ Y $\rho_i : \hat{V} \to V_i$ son una familia de epimorfismos de espacios vectoriales tales que para cada espacio vectorial W y cada familia de aplicaciones lineales $f_i : W \to V_i$ existe una única aplicación lineal $f : W \to \hat{V}$ tal que para cada $k \in I$ el diagrama anterior es conmutativo, entonces V es isomorfo a $\Pi_{i\in I} V_i$.

Demo: Vamos a suponer en principio que existe esta aplicación lineal y vamos a demostrar que entonces sólo se puede definir de una única manera, por lo que demostraremos que, caso de existir, es única. Luego veremos que la única posible verifica lo que queremos.

1-. Supongamos que existe $f : W \to \Pi_{i\in I} V_i$ tales que $\pi_k \circ f = f_k$ tenemos entonces que dado $w \in W$, $f_k(w) = \pi_k(f(w))$, por lo que la coordenada k-esima de $f(w)$ es $f_k(w)$. Así, $f(w) = (f_i(w))_{i\in I}$.

2-. Comprobemos entonces que la aplicación $f : W \to \Pi_{i\in I} V_i$ definido por $f(w) = (f_i(w))_{i\in I}$ es una aplicación lineal que verifica el enunciado:

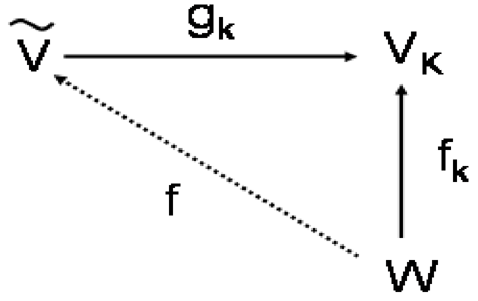
$\star$ ¿Es lineal?

$$\begin{aligned} f(\lambda w_1 + w_2) &= (f_i(\lambda w_1 + w_2))_{i\in I} = (\lambda f_i(w_1) + f_i(w_2))_{i\in I} \\ &= \lambda (f_i(w_1))_{i\in I} + (f_i(w_2))_{i\in I} = \lambda f(w_1) + f(w_2) \end{aligned}$$

$\star$ ¿Hace conmutativo los diagramas? Pues claro

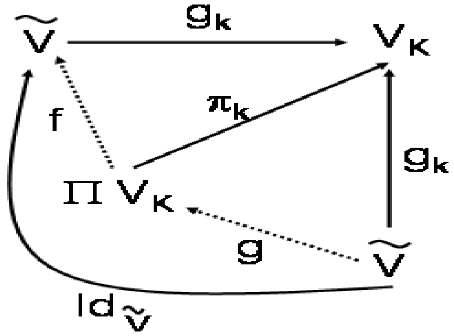
$$\pi_k \circ f(w) = \pi_k((f_i(w))_{i\in I}))f_k(w).$$

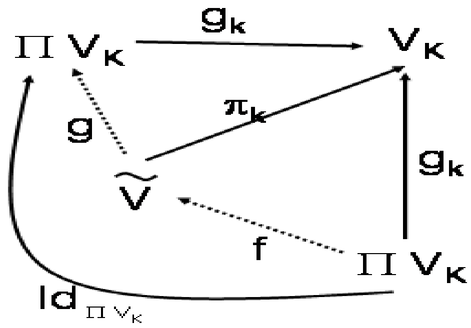
Veamos ahora que todo espacio vectorial con estas propiedades es isomorfo al producto cartesiano de los $\{V_i\}_{i\in I}$. Sea $\hat{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $g_i : \hat{V} \to V_i$ son una familia de epimorfismos de espacios vectoriales tales que para cada espacio vectorial W y cada familia de aplicaciones lineales $f_i : W \to V_i$ existe una única aplicación lineal $f : W \to \hat{V}$ tal que para cada $k \in I$ el diagrama



es conmutativo.

Si consideramos ahora $W = \Pi_{i\in I} V_i$ y $f_i = \Pi_i$ las proyecciones canónicas tenemos que aplicando varias veces esta propiedad fundamental tenemos:





En donde $f \circ g = Id_{\hat{V}}$ y $g \circ f = Id_{\Pi V_i}$ lo que demuestra que tanto f como g son isomorfismos, y por tanto $\hat{V}$ y $\Pi_{i\in I} V_i$ son espacios vectoriales isomorfos.

6.2 Suma directa externa de espacios vectoriales Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\bigoplus_{i\in I} V_i$ el subconjunto de $\Pi_{i\in I} V_i$ de todos los vectores con solo un número finito de entradas no nulas, es decir

$$\bigoplus_{i\in I} V_i = \{(v_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I} V_i \mid v_i = 0 \quad \text{para casi todo } i\}$$

6.2.1 Proposición. Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces $\bigoplus_{i\in I} V_i$ es un subespacio vectorial de $\Pi_{i\in I} V_i$, llamado la suma directa externa de los espacios vectoriales V_i.

Demo: Es claro que si sumo dos vectores con un número finito de coordenadas no nulas, me da un vector con un número finito de coordenadas no nulas, y que si multiplico un vector con un número finito de coordenadas no nulas por un escalar, obtengo un vector con el mismo número de coordenadas no nulas. Es decir, $\oplus_{i\in I}V_i$ es un subespacio vectorial del producto directo de espacios vectoriales.

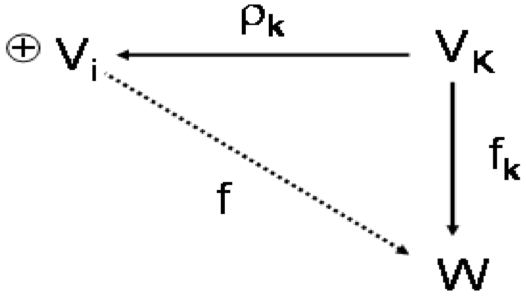
Nota: Si $\#I < \infty$ se tiene que la suma directa de espacios vectoriales y el producto directo de espacios vectoriales es la misma cosa.

6.2.2 DEF: Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\oplus_{i\in I}V_i$ la suma directa de estos espacios vectoriales. Entonces para cada $k \in I$ se define la inclusión canónica de V_k en $\oplus_{i\in I}V_i$ y se representa por

$$\rho_k : V_k \to \oplus_{i\in I}V_i$$

como $\rho_k(v_k) = (x_i)_{i\in I}$ en donde $x_i = 0$ si $i \neq k$ y $x_k = v_k$. Es decir, el vector de $\Pi_{i\in I}V_i$ que tiene todas las coordenadas cero, salvo la k que vale v_k. Es claro que ρ_k es un monomorfismo de espacios vectoriales.

6.2.3 PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LA SUMA DIRECTA DE ESPACIOS VECTORIALES. Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\oplus_{i\in I}V_i$ la suma directa de estos espacios vectoriales. Entonces para cada espacio vectorial W y cada familia de aplicaciones lineales $f_i : V_i \to W$ existe una única aplicación lineal $f : \oplus_{i\in I}V_i \to W$ tal que para cada $k \in I$ el siguiente diagrama es conmutativo:



Es más, Si $\hat{V}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ Y $g_i : V_i \to \hat{V}$ son una familia de monomorfismos de espacios vectoriales tales que para cada espacio vectorial W y cada familia de aplicaciones lineales $f_i : V_i \to W$ existe una única aplicación lineal $f : \hat{V} \to W$ tal que para cada $k \in I$ el diagrama anterior es conmutativo, entonces $\hat{V}$ es isomorfo a $\oplus_{i\in I}V_i$.

Demo: Vamos a suponer en principio que existe esta aplicación lineal y vamos a demostrar que entonces sólo se puede definir de una única manera, por lo que demostraremos que, caso de existir, es única. Luego veremos que la única posible verifica lo que queremos.

1-. Supongamos que existe $f : \oplus_{i\in I} V_i \to W$ tales que $f \circ \rho_k = f_k$ tenemos entonces que dado $v_k \in V_k$, $f_k(v_k) = f(\rho_k(v_k))$, por lo que $f((v_i)_{i\in I}) = f(\sum_{i\in I}(\rho_i(v_i))) = \sum_{i\in I} f_i(v_i)$. Observar que, aunque no lo parezca, por definición de suma directa está es una suma finita (en espacios vectoriales no podemos sumar un número infinito de vectores).

2-. Comprobemos entonces que la aplicación $f : \oplus_{i\in I} V_i \to W$ definido por $f((v_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} f_i(v_i)$ es una aplicación lineal que verifica el enunciado:

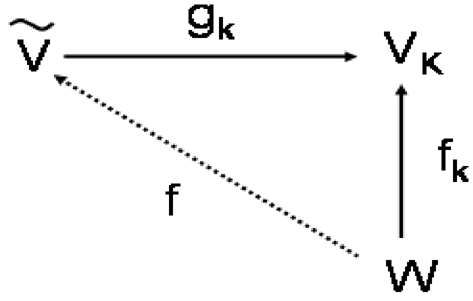
$\star$ ¿Es lineal?

$$\begin{aligned} f(\lambda(v_i)_{i\in I} + (v_i')_{i\in I}) &= f((\lambda v_i + v_i')_{i\in I}) = \sum_{i\in I} f_i(\lambda v_i + v_i') \\ &= \lambda \sum_{i\in I} f_i(v_i) + \sum_{i\in I} f_i(v_i') = \lambda f((v_i)_{i\in I}) + f((v_i')_{i\in I}) \end{aligned}$$

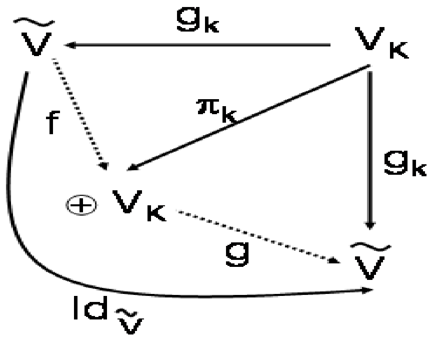
$\star$ ¿Hace conmutativo los diagramas? Pues claro

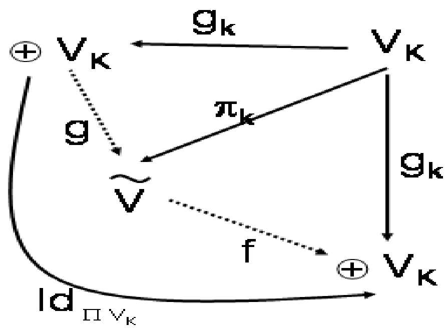
$$f \circ \rho_k(v_k) = f_k(v_k).$$

Veamos ahora que todo espacio vectorial con estas propiedades es isomorfo al producto cartesiano de los $\{V_i\}_{i\in I}$. Sea $\hat{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $g_i : V_i \to \hat{V}$ son una familia de monomorfismos de espacios vectoriales tales que para cada espacio vectorial W y cada familia de aplicaciones lineales $f_i : V_i \to W$ existe una única aplicación lineal $f : \hat{V} \to W$ tal que para cada $k \in I$ el siguiente diagrama es conmutativo:



Si consideramos ahora $W = \oplus_{i\in I} V_i$ y $f_i = \rho_i$ las inclusiones canónicas tenemos, aplicando varias veces esta propiedad fundamental:





En donde $g \circ f = Id_{\hat{V}}$ y $f \circ g = Id_{\oplus V_i}$ lo que demuestra que tanto f como g son isomorfismos, y por tanto $\hat{V}$ y $\oplus_{i \in I} V_i$ son espacios vectoriales isomorfos.

6.3 Espacio vectorial cociente Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio vectorial de V.

$\star$ Podemos entonces definir una relación de equivalencia en V. Dados $v_1, v_2 \in V$ diremos que v_1 está relacionado con v_2 y lo representaremos por $v_1 \approx v_2$ si

$$v_1 \approx v_2 \quad \text{si y sólo si} \quad v_1 - v_2 \in W.$$

Veamos que "$\approx$" es una relación de equivalencia en V:

– Reflexiva: para todo $v \in V$, $v - v = 0 \in W$, por lo que $v \approx v$.

– Transitiva: dados $v_1, v_2, v_3 \in V$ tal que $v_1 \approx v_2$ y $v_2 \approx v_3$, se tiene que $v_1 - v_2 \in W$ y $v_2 - v_3 \in W$. Por tanto $v_1 - v_3 = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) \in W$. Por tanto $v_1 \approx v_3$.

– Simétrica: Dados $v_1, v_2 \in V$ tal que $v_1 \approx v_2$, se tiene que $v_1 - v_2 \in W$. Por tanto el opuesto de este elemento también cae en W, por lo que $v_2 - v_1 = -(v_1 - v_2) \in W$. Así, $v_2 \approx v_1$.

$\star$ Consideremos el conjunto cociente $V/\approx$, que es este caso denotaremos por V/W,

$$V/W := \{[v] \mid v \in V\}.$$

Nota 1: Dado $v \in V$,

$$\begin{aligned}[v] &= \{u \in V \mid v - u \in W\} = \{v \in V \mid v = u + w, \text{ con } w \in W\} \\ &= \{v + w \in V \mid w \in W\} = v + W.\end{aligned}$$

Nota 2: $[\overline{0}] = W$.

$\star$ Vamos a definir una estructura de $\mathbb{K}$ espacio vectorial en este conjunto cociente.

– La suma: dados $[v_1], [v_2] \in V/W$,

$$[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2]$$

– El producto por escalares: dados $[v] \in V/W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda[v] := [\lambda v]$$

Nota: Cuando se define una operación en un conjunto cociente, y ésta se define a partir de representantes, lo primero que hay que comprobar es que está bien definida, es decir:

$\diamond$ Si $[v_1] = [v_1']$ y $[v_2] = [v_2']$, entonces $[v_1 + v_2] = [v_1' + v_2']$
$\diamond$ Si $[v_1] = [v_1']$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $[\lambda v_1] = [\lambda v_1']$

Veamos entonces que están bien definidas:

$\diamond_1$ Sea $v_1, v_1', v_2, v_2' \in V$ tales que $[v_1] = [v_1']$ y $[v_2] = [v_2']$ tenemos entonces que $v_1 - v_1'$ y $v_2 - v_2' \in W$ por tanto

$$v_1 - v_1' + v_2 - v_2' = v_1 + v_2 - (v_1' + v_2') \in W$$

es decir, $[v_1 + v_2] = [v_1' + v_2']$.

$\diamond_2$ Sea $v_1, v_1' \in V$ tales que $[v_1] = [v_1']$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos entonces que $v_1 - v_1' \in W$. Por tanto

$$\lambda(v_1 - v_1') = \lambda v_1 - \lambda v_1' \in W$$

por tanto $[\lambda v_1] = [\lambda v_1']$.

$\star$ Veamos que con estas operaciones $(V/W, +, \ )$ tiene estructura de $\mathbb{K}$ espacio vectorial:

– Es claro que la suma es asociativa:

$$[v_1] + ([v_2] + [v_3]) = [v_1 + (v_2 + v_2)] = [(v_1 + v_2) + v_3] = ([v_1] + [v_2]) + [v_3]$$

– Es claro que la suma es conmutativa:

$$[v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2] = [v_2 + v_1] = [v_2] + [v_1]$$

– Es claro que $[\overline{0}] \in V/W$ es el elemento neutro de la suma:

$$[v_1] + [\overline{0}] = [v_1 + \overline{0}] = [v_1] = [\overline{0} + v_1] = [\overline{0}] + [v_1]$$

– Dado $[v] \in V/W$ es claro ahora que su opuesto es $[-v]$:

$$[v] + [-v] = [v - v] = [\overline{0}] = [-v + v] = [-v] + [v]$$

Es igualmente claro que se verifican las 4 propiedades relativas al producto externo:

– $\lambda([v_1] + [v_2]) = [\lambda(v_1 + v_2)] = [\lambda v_1 + \lambda v_2] = \lambda[v_1] + \lambda[v_2]$.

– $(\lambda + \mu)[v] = [(\lambda + \mu)v] = [\lambda v + \mu v] = \lambda[v] + \mu[v]$.

–$1[v] = [1v] = [v]$.

–$\lambda(\mu[v]) = [\lambda(\mu v)] = [(\lambda\mu)v] = (\lambda\mu)[v]$.

Nota: trabajar con el espacio vectorial cociente es fácil, Es simplemente poner clases a los vectores.

6.3.1 Proposición (Base del espacio vectorial cociente). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio de V. Consideremos V/W el espacio vectorial cociente.

Sea $B' = \{v_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una base de W, por tanto es un conjunto de vectores independientes de V y sea B una base de V que contenga a B', es decir $B = \{v_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \cup \{e_i\}_{i\in I}$.

Nota: Es claro que dado $v_\alpha \in B'$, $[v_\alpha] = [\overline{0}]$ (ya que $v_\alpha \in W$). Por tanto estos vectores no van a poder estar en la base de V/W. Veamos entonces que el conjunto de vectores que se han añadido si forman una base de V/W, es decir, $\overline{B} = \{\overline{e}_i\}_{i\in I}$ es base de V/W

⋄ ¿Son generadores? Dado $[v] \in V/W$, tenemos que $v = \sum \mu_\alpha v_\alpha + \sum \lambda_i e_i$ y por tanto

$$\begin{aligned}[v] &= [\sum \mu_\alpha v_\alpha + \sum \lambda_i e_i] = \sum \mu_\alpha [v_\alpha] + \sum \lambda_i [e_i] = \sum \mu_\alpha [\overline{0}] + \sum \lambda_i [e_i] \\ &= \sum \lambda_i [e_i]\end{aligned}$$

⋄ ¿Son independientes? Si $\sum \lambda_i [e_i] = [\overline{0}]$, entonces $\sum \lambda_i e_i - \overline{0} \in W$ y por tanto $\sum \lambda_i e_i = \sum \mu_\alpha v_\alpha$ por tanto, al ser B base de V, $\lambda_i = \mu_\alpha = 0\ \forall \alpha \in \mathcal{A}$, $i \in I$.

6.3.2 COROLARIO. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión n. Sea W un subespacio vectorial de dimensión m. Entonces

$$\dim_{\mathbb{K}}(V/W) = n - m.$$

6.4 EL ESPACIO VECTORIAL "Hom" Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Veamos que podemos dotar de estructura de $\mathbb{K}$ espacio vectorial al conjunto de todos los homomorfismos de V en W.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) = \{f : V \to W \mid \text{con } f \text{ una aplicación lineal de } V \text{ en } W\}$$

$\star$ Definimos la suma:

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \quad \forall v \in V$$

$\star$ Definimos el producto externo:

$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v) + g(v) \quad \forall v \in V$$

Nota: Para esta estructura de espacio vectorial, sólo nos hacia falta que W fuera un $\mathbb{K}$ espacio vectorial (ver el último ejercicio de la relación 3).

6.4.1 PROPOSICIÓN. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Supongamos que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ y $\dim_{\mathbb{K}} W = m$. Entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ es isomorfo, como espacio vectorial a $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Es más, si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $B' = \{w_, .w_2, \ldots, w_m\}$ es una base de W, la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{B'B} : & Hom_{\mathbb{K}}(V, W) & \to & \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & A^f_{B'B} \end{array}$$

en donde $A_f^{B'B}$ denota la matriz asociada a f respecto de las bases B y B', es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demo: Recordamos que para calcular la matriz asociada a f respecto de las bases B y B' se calculan las imágenes por f de los elementos de la base de B y se escriben como combinación lineal de elementos de B' (es decir, se calculan sus coordenadas respecto de B'). Es decir:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_{11}w_1 + \lambda_{12}w_2 + \ldots + \lambda_{1m}w_m \\ f(v_2) &= \lambda_{21}w_1 + \lambda_{22}w_2 + \ldots + \lambda_{2m}w_m \\ &\vdots \\ f(v_n) &= \lambda_{n1}w_1 + \lambda_{n2}w_2 + \ldots + \lambda_{nm}w_m \end{aligned}$$

Entonces estas coordenadas puestas en columnas nos dan la matriz que buscamos:

$$A^f_{B'B} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \dots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{1m} & \lambda_{2m} & \dots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Es claro, que $\Psi_{B'B}(f+g) = \Psi_{B'B}(f)+\Psi_{B'B}(f)$ y que $\Psi_{B'B}(\lambda f) = \lambda\Psi_{B'B}(f)$, es decir, $\Psi_{B'B}$ es un homomorfismo de espacios vectoriales.

$\star$ Veamos que $\Psi_{B'B}$ es inyectiva. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ tal que $\Psi_{B'B}(f) = A^f_{B'B} = 0$. Entonces, por construcción, las coordenadas de las imágenes de cada elemento de B respecto de B' son cero (si $A^f_{B'B} = 0$, f manda los vectores de la base B a cero) por lo que f es nula, i.e., f es inyectiva.

$\star$ Veamos que $\Psi_{B'B}$ es sobreyectiva. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, sea $f = f_{B'} \circ A \circ f_B^{-1}$, entonces, otra vez por construcción, $\Psi_{B'B}(f) = A$.

6.4.2 Corolario. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Supongamos que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ y $\dim_{\mathbb{K}} W = m$. Entonces $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) = nm$.

Nos vamos a encontrar con una relación todavía mas estrecha entre el espacio vectorial Hom y las matrices:

6.4.3 Proposición. Sean V, W y U tres espacios vectoriales de dimensiones finitas (n,m y s respectivamente) sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ con bases B, B' y B'' (resp.). Sean $f : V \to W$ y $g : W \to U$ dos aplicaciones lineales con matrices asociadas respecto de estas bases $A^f_{B'B}$ y $A^g_{B''B'}$. Entonces

$$A^{g\circ f}_{B''B} = A^g_{B''B'}A^f_{B'B}$$

es decir, la matriz asociada a $g \circ f$ respecto de las bases B y B'' es el producto matricial de las dos anteriores.

6.4.4 Corolario. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea B una base de V. Entonces la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{BB}: & Hom_{\mathbb{K}}(V, V) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & A^f_{BB} \end{array}$$

es un isomorfismo de anillos. Es decir, es una aplicación lineal que va bien con la suma, la multiplicación por escalares y con el producto.

Nota: Esto tiene implicaciones importantes. Por ejemplo, Demostrar que el producto de matrices es asociativo o distributivo es complicado, con este corolario se vuelve trivial. Si tengo $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ como Ψ_{BB} es biyectiva existe aplicaciones lineales f_A, f_B y f_C de V en V tales que $\Psi(f_A) = A$, $\Psi(f_B) = B$ y $\Psi(f_C) = C$. Es más,

$$(f_A + f_B) \circ f_C = f_A \circ f_C + f_B \circ f_C$$

lo que implica, si aplicamos Ψ en ambos lados de la igualdad que

$$(A + B)C = AC + BC.$$

La propiedad asociativa es equivalente.

6.5 El espacio vectorial dual. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se define el espacio vectorial dual y se denota por V^* como

$$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}).$$

6.5.1 Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces $B^* = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset V^*$ en donde para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

es una base de V^*.

6.5.2 Ejemplo. Sea $V = \mathbb{R}^{"}$ y consideremos $B = \{(1,1), (0,1)\}$ base de V. Calcula la base dual de B y da las coordenadas de $f \in V^*$ definido por $f(x, y) = 5x + 7y$ respecto de esta base dual.

Buscamos dos aplicaciones lineales $f_1, f_2 \in V^*$ tales que:

$$\begin{array}{cccc} f_1 : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \\ & (1,0) & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} f_2 : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (1,1) & \mapsto & 0 \\ & (1,0) & \mapsto & 1 \end{array}$$

Tenemos entonces que dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $(x, y) = y(1,1) + (x - y)(1,0)$. Por tanto,

$$f_1(x, y) = f_1(y(1,1) + (x - y)(1,0)) = yf_1(1,1) + (x - y)f_1(1,0) = y$$
$$f_2(x, y) = f_2(y(1,1) + (x - y)(1,0)) = yf_2(1,1) + (x - y)f_2(1,0) = x - y$$

Luego esta es la base dual. Es más, por lo anterior

$$f = f(1,1)f_1 + f(1,0)f_2 = 12f_1 + 5f_2.$$

6.5.3 COROLARIO. Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita, V y V^* son isomorfos.

Nota: Si V tiene dimensión infinita, V nunca es isomorfo a V^*. Por ejemplo, si $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \aleph_0$, y $\dim_{\mathbb{K}}(V^*) = \aleph_1$.

Podemos preguntarnos ahora que sucede si hacemos el dual del dual de un espacio vectorial, es decir V^{**}, que normalmente se llama el bi-dual, o segundo dual de V. Veamos que en general V es isomorfo a un subespacio de V^{**}.

6.5.4 PROPOSICIÓN. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea V^{**} el segundo dual de V. Entonces la aplicación $\Phi : V \to V^{**}$ definida por

$$\begin{array}{cccl} \Phi : & V & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V^*, \mathbb{K}) \\ & v & \mapsto & \Phi_v : V^* \to \mathbb{K} \\ & & & \qquad f \ \mapsto f(v) \end{array}$$

es un monomorfismo de espacios vectoriales. Es más, Φ es un isomorfismo de espacios vectoriales si y sólo si $\dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty$

7. RANGO DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Durante esta sección todos los espacios vectoriales que aparezcan serán de dimensión finita. Por lo que nos permitirá trasladar propiedades de aplicaciones lineales a matrices y viceversa.

7.1 DEF: Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Se define el rango de f, y se representa por $\mathrm{Rang}(f)$, como:

$$\mathrm{Rang}(f) := \dim_{\mathbb{K}}(Im(f))$$

Nota: Recordamos que dados V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $f : V \to W$ una aplicación lineal y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V, se tiene que $f(B) = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$, por lo que para calcular una base de $Im(f)$ solo tendremos que quedarnos con un conjunto maximal de vectores independientes de $f(B)$.

7.2 TEOREMA. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces:

(i) Se verifica la formula de las dimensiones:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} V$$

(ii) Existe B una base de V y B' una base de W tal que la matriz asociada a f respecto de estas bases es

$$A^f_{B'B} = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en donde $r = \mathrm{Rang}(f)$. Es más, si la matriz asociada a f respecto de dos bases $\hat{B}$ y $\hat{B}'$ es de la forma $\begin{pmatrix} Id_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $s = \mathrm{Rang}(f)$.

Demo. Vamos a demostrar el apartado (ii), ya que en la demostración quedará patente (i). La forma de demostrarlo va a ser constructiva, por lo que nos va a dar un algoritmo que podremos aplicar a un caso concreto.

1-. Calculamos el núcleo de f y obtenemos una base de él (teóricamente lo podemos hacer porque hemos demostrado que todo espacio vectorial posee base). Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ una base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2-. Por ser $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ base de $\mathrm{Ker}(f)$, es un conjunto de vectores independientes de V, por lo que podemos completar hasta obtener una base de V (los elementos con los que completamos los colocamos delante de la base del $\mathrm{Ker}(f)$). Sea $B = \{v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_s\}$ base de V.

3-. Veamos que la imagen de los vectores que hemos añadido, es decir, $\{f(v_{s+1}), f(v_{s+2}), \ldots, f(v_n)\}$ es base de $\mathrm{Im}(f)$. Sabemos que

$$f(B) = \{f(v_{s+1}), f(v_{s+2}), \ldots, f(v_n), f(v_1), \ldots, f(v_s)\}$$

es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$. Pero como $v_1, v_2, \ldots, v_s \in \mathrm{Ker}(f)$, se tiene que $f(v_1) = f(v_2) = \ldots = f(v_s) = 0$, por lo que $\{f(v_{s+1}), f(v_{s+2}), \ldots, f(v_n)\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$. Veamos que son independientes. Supongamos

$$0 = \lambda_{s+1} f(v_{s+1}) + \ldots + \lambda_n f(v_n) = f(\lambda_{s+1} v_{s+1} + \ldots + \lambda_n v_n)$$

por lo que $\lambda_{s+1} v_{s+1} + \ldots + \lambda_n v_n \in ker(f)$ y por tanto se puede escribir como combinación lineal de elementos de la base de $\mathrm{Ker}(f)$. Así,

$$\lambda_{s+1} v_{s+1} + \ldots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s$$

y al ser B una base de V todos los λ_i son cero, como queríamos demostrar.

4-. Por ser $\{f(v_{s+1}), f(v_{s+2}), \ldots, f(v_n)\}$ base de $\mathrm{Im}(f)$, es un conjunto de vectores independientes de W, por lo que podemos completar hasta obtener una base de W. Sea $B' = \{f(v_{s+1}), f(v_{s+2}), \ldots, f(v_n), w_1, w_2, \ldots, w_k\}$

5-. Veamos que la matriz asociada a f respecto de las bases B y B' es de la forma que queremos.

$$\begin{aligned}
f(v_{s+1}) &= 1f(v_{s+1}) + 0f(v_{s+2}) + 0f(v_{s+3}) + \ldots + 0f(v_n) + 0w_1 + \ldots + 0v_k \\
f(v_{s+2}) &= 0f(v_{s+1}) + 1f(v_{s+2}) + 0f(v_{s+3}) + \ldots + 0f(v_n) + 0w_1 + \ldots + 0v_k \\
&\vdots \\
f(v_n) &= 0f(v_{s+1}) + 0f(v_{s+2}) + 0f(v_{s+3}) + \ldots + 1f(v_n) + 0w_1 + \ldots + 0v_k \\
f(v_1) &= 0f(v_{s+1}) + 0f(v_{s+2}) + 0f(v_{s+3}) + \ldots + 0f(v_n) + 0w_1 + \ldots + 0v_k \\
f(v_2) &= 0f(v_{s+1}) + 0f(v_{s+2}) + 0f(v_{s+3}) + \ldots + 0f(v_n) + 0w_1 + \ldots + 0v_k \\
&\vdots \\
f(v_s) &= 0f(v_{s+1}) + 0f(v_{s+2}) + 0f(v_{s+3}) + \ldots + 0f(v_n) + 0w_1 + \ldots + 0v_k
\end{aligned}$$

por lo que su matriz asociada es $A^f_{B'B} = \begin{pmatrix} Id_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en donde $r = n - s = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)$. Es más,

$$\dim_{\mathbb{K}} Ker(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(F) = s + (n - s) = n = \dim_{\mathbb{K}} V.$$

Veamos por último que si tengo $\hat{B} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \ldots, \hat{v}_n\}$ base de V y $\hat{B}' = \{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \ldots, \hat{w}_m\}$ de W tales que la matriz asociada a f respecto de $\hat{B}$ y $\hat{B}'$ es de la forma $\begin{pmatrix} Id_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $s = \mathrm{Rang}(f)$. Al ser la matriz asociada ésta, $f(\hat{B}) = \{f(\hat{v}_1), f(\hat{v}_2), \ldots, f(\hat{v}_n)\} = \{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \ldots, \hat{w}_s\}$, por tanto $\{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \ldots, \hat{w}_s\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$ y además son independientes, al estar contendidos en una base de W. Así, es base de $\mathrm{Im}(f)$ por lo que s es la dimension de la imagen, es decir, $s = \mathrm{Rang}(f)$. ∎

Nota: Recordamos que dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, con $\mathbb{K}$ un cuerpo, podemos construir la aplicación lineal, $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por

$$f_A((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y que la matriz asociada a esta aplicación lineal respecto de las bases canónicas es precisamente A. Es decir, si C es la base canónica de $\mathbb{K}^n$ y C' es la base canónica de $\mathbb{K}^m$, entonces $A^f_{C'C} = A$.

7.3 Corolario. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces existen dos matrices inversibles, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ tales que $QAP = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Demo: Consideramos la aplicación lineal $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, entonces, por el teorema anterior, existe B base de $\mathbb{K}^n$ y B' base de $\mathbb{K}^m$ tales que la matriz asociada a f_A respecto de estas bases es de la forma $\begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ahora, aplicando la relación existente entre dos matrices asociadas a un mismo endomorfismo respecto de distintas bases tenemos que

$$\begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^{f_A}_{B'B} = C_{B'C'} A^{f_A}_{C'C} C_{CB} = C_{B'C'} A C_{CB}.$$

Por tanto $Q = C_{B'C'}$ y $P = C_{CB}$ son las matrices inversibles, al ser matrices de cambio de base, que nos demuestran el corolario. ■

Nos va a interesar definir una cierta relación de equivalencia en el conjunto de las matrices de tamaño $m \times n$ sobre un cuerpo K.

7.4 Def: Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diremos que A es una matriz equivalente a B, y lo representaremos $A \equiv B$, si existen dos matrices inversibles, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ tales que $QAP = B$.

7.5 Lema I. La relación "ser equivalente a" es una relación de equivalencia en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Demo: Veamos que esta relación verifica las propiedades reflexiva, transitiva y simétrica.

– Reflexiva. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $A = Id_m A Id_n$, por tanto $A \equiv A$.

– Transitiva. Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tales que $A \equiv B$ y $B \equiv C$. Tenemos entonces que existen matrices $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ y $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles tales que $Q_1AP_1 = B$ y $Q_2BP_2 = C$. Entonces $(Q_2Q_1)A(P_1P_2) = C$ con Q_2Q_1 y P_1P_2 matrices inversibles al ser producto de dos matrices inversibles. Por tanto $A \equiv C$

– Simétrica. Supongamos que $QA \equiv B$, entonces existen matrices inversibles $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ y $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que $QAP = B$. Entonces $Q^{-1}BP^{-1} = A$ con lo que $B \equiv A$. ■

7.6 Teorema. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces A es equivalente a B si y sólo si A y B son matrices asociadas un mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

La demostración de este Teorema la vamos a dividir en una serie de proposiciones que tendrán interés por sí mismas.

7.6.1 Proposición I Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Supongamos que A y B son matrices asociadas a una misma aplicación lineal respecto de bases distintas. Entonces $A \equiv B$.

Demo: Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal y sean $B, \hat{B}$ bases de V y $B', \hat{B}'$ bases de W tales que $A = A^f_{B'B}$ y $B = A^f_{\hat{B}'\hat{B}}$. Entonces, existen matrices de cambio de base, $Q = C_{\hat{B}'B'}$ y $P = C_{\hat{B},B}$, y por tanto inversibles, tales que $C_{\hat{B}'B'}AC_{B\hat{B}} = B$. es decir, A y B son matrices equivalentes. ■

Nota: Si nos damos cuanta, parece que hemos obtenido algo más. No sólo A y B son matrices equivalentes, sino que las matrices P y Q que aparecen son matrices del cambio de base. Como veremos a continuación éste no es un hecho sorprendente.

7.6.2 Proposición II Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces P es una matriz inversible si y sólo si P es una matriz de cambio de base (es decir, existen B y B' bases de $\mathbb{K}^n$ tales que $C_{B'B} = P$).

Es más, si C es la base canónica de $\mathbb{K}^n$ y P es una matriz inversible, $B = \{Pe_1, Pe_2, \ldots, Pe_n\}$ es base de $\mathbb{K}^n$ y $C_{CB} = P$.

Demo: Ya sabemos, que $P = C_{B'B}$ es la matriz de cambio de base entre B y B', entonces P es inversible con inversa $C_{BB'}$ (el cambio opuesto).

Veamos el recíproco, que es el interesante. Supongamos que P es una matriz inversible. Tenemos entonces que la aplicación lineal $f_P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tiene por inversa a $f_{P^{-1}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ya que $f_P \circ f_{P^{-1}} = Id_{\mathbb{K}^n} = f_{P^{-1}} \circ f_P$. Por tanto, f_P es un isomorfismo de espacios vectoriales y así, si consideramos $C = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$,

$$B := f_P(C) = \{Pe_1, Pe_2, \ldots, Pe_n\}$$

es base de $\mathbb{K}^n$. Por último C_{CB}, la matriz de cambio de base de B a C, es P (como C es la base canónica, la matriz de cambio de base de B a C es tomar los vectores de B y ponerlos en columnas, pero Pe_1 es la primera columna de P, Pe_2 la segunda, etc). ■

Nota: La matriz de cambio de base de C a B es $C_{BC} = P^{-1}$.

7.6.3 Proposición III Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean A y B dos matrices equivalentes de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ es una aplicación lineal que tiene por matriz asociada tanto a A como a B.

Demo: Por definición existen dos matrices inversibles $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ tales que $QAP = B$. Sean

$$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \qquad C = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \qquad \text{y} \qquad C' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$$

en donde f_A es la aplicación lineal asociada a A, y C y C' son las bases canónicas de $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$ respectivamente. Entonces, como ya sabemos,

$$A^f_{C'C} = A.$$

Por otro lado, como P es una matriz inversible,

$$B = f_P(C) = \{Pe_1, Pe_2, \ldots, Pe_n\}$$

es base de $\mathbb{K}^n$ y $C_{BC} = P^{-1}$, ver (7.6.2). De forma similar, como Q^{-1} es una matriz inversible,

$$B' = f_{Q^{-1}}(C') = \{Q^{-1}e'_1, Q^{-1}e'_2, \ldots, Q^{-1}e'_m\}$$

es base de $\mathbb{K}^m$ y $C_{B'C'} = Q$ (es decir, si las coordenadas de un vector v respecto de la base canónica son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces las coordenadas de v respecto de B' son $f_Q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$).

Por último, calculemos la matriz asociada a f_A respecto de las bases B y B': dado el vector Pe_i, las coordenadas de $f_A(Pe_i)$ respecto de la base canónica de

$\mathbb{K}^m$ son APe_i, por lo que sus coordenadas respecto de B' son $QAPe_i$, es decir, Be_i, la columna i-esima de la matriz B. Así, la matriz asociada a f_A respecto de B y B' es precisamente B. ■

7.7 Def: Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se define el rango de A, y se representa por $\mathrm{Rang}(A)$ como el rango de la aplicación lineal asociada f_A.

7.8 Proposición. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces el rango de A coincide con el número máximo de columnas linealmente independientes de la matriz A.

Demo: Recordamos que dada una aplicación lineal $f : V \to W$, si B es una base de V, $f(B)$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$. Por tanto si consideramos C la base canónica de $\mathbb{K}^n$, $f_A(C)$ son precisamente las columnas de A, por lo que una base de $Im(f_A)$ estará compuesta por un número máximo de vectores independientes dentro de $f_A(C)$. ■

Nota: El rango de una matriz en la forma $\begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es precisamente r.

7.9 Teorema. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Sea B una base de V y B' base de W. Entonces $\mathrm{Rang}(A^f_{B'B}) = \mathrm{Rang}(f)$. Es decir, el rango de f coincide con el rango de cualquier matriz asociada a f.

Demo: La relación existente entre f y su matriz asociada respecto de las bases B y B' queda expuesta en el siguiente diagrama conmutativo:

Veamos que la aplicación $f_{B'}|_{\mathrm{Im}(f))} : \mathrm{Im}(f)) \to \mathrm{Im}(f_{A^f_{B'B}})$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, por lo que

$$\mathrm{Rang}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(f)) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(f_{A^f_{B'B}}) = \mathrm{Rang}(A^f_{B'B})))$$

i-. Dado $y \in \mathrm{Im}(f)$, tenemos que ver que $f_{B'}(y) \in \mathrm{Im}(f_{A^f_{B'B}})$. Por definición existe $x \in V$ tal que $f(x) = y$. Por tanto $y = f_{B'} \circ f(x) = f_{A^f_{B'B}} \circ f_B(x) \in \mathrm{Im}(f_{A^f_{B'B}})$.

ii-. Como $f_{B'}$ era un isomorfismo de espacios vectoriales,, cuando restringimos a $\mathrm{Im}(f)$, seguimos teniendo que verifica la condición de aplicación lineal, y que es inyectiva.

iii-. Veamos por último que es sobreyectiva. Dado $w \in \operatorname{Im}(f_{A^f_{B'B}})$, existe $u \in \mathbb{K}^n$ tal que $f_{A^f_{B'B}}(u) = w$ y como f_B es un isomorfismo, existe $v \in V$ tal que $f_B(v) = u$. Por tanto $w = f_{A^f_{B'B}} \circ f_B(v) = f_{B'} \circ f(v)$, lo que demuestra el teorema. ■

7.10 Corolario. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango.

Demo: Si A y B son equivalentes, están asociadas a un mismo homomorfismo y por tanto el rango de ambas coincide con el rango de este homomorfismo. Recíprocamente, si A y B tienen el mismo rango, digamos r, entonces por (7.3), A es equivalente a una matriz de la forma $\begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en donde r, por la implicación anterior, es el rango de A. De forma similar, B es equivalente a $\begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y por tanto, como ser equivalente a es una relación de equivalencia, A y B son equivalentes. ■

7.11 Proposición. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces A es inversible si y sólo si $\operatorname{Rang}(A) = n$.

Demo: Si A es inversible, existe $A^{-1}\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = Id_n = A^{-1}A$. Entonces A es equivalente a la matriz identidad y por tanto $\operatorname{Rang}(A) = n$. Recíprocamente, si $\operatorname{Rang}(A) = n$ existen matrices inversible P y Q tales que $QAP = Id_n$ y por tanto $A = Q^{-1}P^{-1}$ que es inversible al ser producto de matrices inversibles. ■

7.12 Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. En lo que sigue veremos que $\operatorname{Rang}(A)$ coincide con el máximo número de filas linealmente independientes de A (que a su vez coincidía con el máximo número de columnas independientes de A). Para la demostración de este Teorema vamos a introducir la noción de matriz transpuesta.

7.12.1 Def: Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Al elemento que ocupa el lugar (i, j) en la matriz A lo vamos a denotar por $A(i, j)$. Se define la matriz transpuesta de A y se representa por A^t, como la matriz que verifica:

$$A^t(i, j) := A(j, i).$$

Observar que $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$.

Veamos un ejemplo: si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Nota: Las filas (resp. columnas) de A se transforman en columnas (resp. filas) de A^t.

7.12.2 PROPOSICIÓN. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n\times s}(\mathbb{K})$ y $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces:

(i) $(A+B)^t = A^t + B^t$ (en este caso ambas matrices tienen el mismo tamaño).

(ii) $(CD)^t = D^tC^t$.

(iii) $(A^t)^t = A$.

(iv) $Id_n^t = Id_n$

(v) $(E^{-1})^t = (E^t)^{-1}$ (en este caso E es una matriz inversible y cuadrada).

Demo: (i). Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces:

$$(A+B)^t(i,j) = (A+B)(j,i) = A(j,i)+B(j,i) = A^t(i,j)+B^t(i,j) = (A^t+B^t)(i,j)$$

(ii). Sea $C \in\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $D \in \mathcal{M}_{n\times s}(\mathbb{K})$. Entonces

$$CD(i,j) = \sum_{r=1}^{n} C(i,r)D(r,j) \qquad \text{y} \qquad D^tC^t(i'.j') = \sum_{r=1}^{n} D^t(i',r)C^t(r,j')$$

Luego,

$$\begin{aligned} D^tC^t(j,i) = \sum_{r=1}^{n} D^t(j,r)C^t(r,i) &= \sum_{r=1}^{n} D(r,j)C(i,r) = \\ \sum_{r=1}^{n} C(i,r)D(r,j) &= CD(i,j) \end{aligned}$$

es decir, $(CD)^t = D^tC^t$.

(iii) y (iv) son triviales.

(v). Tenemos que $EE^{-1} = Id = E^{-1}E$. Por tanto, si “transponemos” en esta igualdad obtenemos:

$$\begin{aligned} Id &= (Id)^t = (EE^{-1})^t = (E^{-1})^tE^t \\ Id &= (Id)^t = (E^{-1}E)^t = E^t(E^{-1})^t \end{aligned}$$

es decir, $(E^{-1})^t$ es la inversa de E^t. ■

Nota: Una aplicación de un anillo en si mismo, en este caso el anillo de las matrices cuadradas de orden n, con las propiedades (i), (ii) y (iii) se la denomina involución.

7.12.3 PROPOSICIÓN. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^t)$.

Demo: Sabemos, que dada $a \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ existen $p \in\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ tales que $QAP = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces, por (7.12.2),

$$P^tA^tQ^t = (QAP)^t = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que demuestra que $\mathrm{Rang}(A^t) = r$. ■

7.13 TEOREMA. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces $\mathrm{Rang}(A)$ coincide con el máximo número de filas linealmente independientes de A (que a su vez coincidía con el máximo número de columnas independientes de A).

Demo: Tenemos entonces que el rango de A coincide con el rango de A^t. Pero el rango de A^t es el número de columnas independientes de A^t, que no es más que el número de filas independientes de A. ■

8. TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

En la sección anterior hemos demostrado que dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ en donde $\mathbb{K}$ denota un cuerpo existen matrices inversibles $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ y $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que

$$PAQ = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pero para encontrar estas matrices, tenemos que construir una aplicación lineal y ciertos matrices de cambio de base. Veamos en esta sección un método directo para abordar este problema.

8.1 DEF: Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Las siguientes manipulaciones sobre A se dice que son transformaciones elementales.

Tipo I. Intercambiar dos filas o dos columnas de A.

Tipo II. Sumar a una fila (resp. columna) otra fila (resp. columna) multiplicada por un escalar.

Tipo III. Multiplicar una fila o una columna por un escalar no nulo.

En el siguiente teorema se demuestra que hacer transformaciones elementales en una matriz no es más que multiplicar ésta, a derechas o a izquierdas, por una matriz conveniente (la matriz identidad a la que previamente se le ha hecho el mismo cambio).

8.2 Teorema. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces:

(i_1). Sea $I_{(i\leftrightarrow j)}$ la matriz que obtenemos al intercambiar la fila i por la fila j en la matriz identidad. Entonces $I_{(i\leftrightarrow j)}A$ es la matriz que obtenemos al intercambiar la fila i por la fila j en A. Notar que $I_{(i\leftrightarrow j)}$ es inversible con inversa ella misma, es decir, $(I_{(i\leftrightarrow j)})^2 = Id$.

(i_2). Sea $I^{[i\leftrightarrow j]}$ la matriz que obtenemos al intercambiar la columna i por la columna j en la matriz identidad. Entonces $AI^{[i\leftrightarrow j]}$ es la matriz que obtenemos al intercambiar la columna i por la columna j en A. Notar que $I^{[i\leftrightarrow j]}$ es inversible con inversa ella misma, es decir, $(I^{[i\leftrightarrow j]})^2 = Id$.

(ii_1). Sea $I_{(i+\lambda j)}$ la matriz que obtenemos al sumar a la fila i la fila j multiplicada por $\lambda \in \mathbb{K}$ en la matriz identidad. Entonces $I_{(i+\lambda j)}A$ es la matriz que obtenemos al sumar a la fila i la fila j multiplicada por $\lambda \in \mathbb{K}$ en A. Notar que $I_{(i+\lambda j)}$ es inversible con inversa $I_{(i-\lambda j)}$, es decir, $I_{(i+\lambda j)}I_{(i-\lambda j)} = I_{(i-\lambda j)}I_{(i+\lambda j)} = Id$.

(ii_2). Sea $I^{[i+\lambda j]}$ la matriz que obtenemos al sumar a la columna i la columna j multiplicada por $\lambda \in \mathbb{K}$ en la matriz identidad. Entonces $AI^{[i+\lambda j]}$ es la matriz que obtenemos al sumar a la columna i la columna j multiplicada por λ en A. Notar que $I^{[i+\lambda j]}$ es inversible con inversa $I^{[i-\lambda j]}$, es decir, $I^{[i+\lambda j]}I^{[i-\lambda j]} = I^{[i-\lambda j]}I^{[i+\lambda j]} = Id$.

(iii_1). Sea $I_{(i\to\lambda i)}$ la matriz que obtenemos al multiplicar la fila i por $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ en la matriz identidad. Entonces $I_{(i\to\lambda i)}A$ es la matriz que obtenemos al multiplicar la fila i por λ en A. Notar que $I_{(i\to\lambda i)}$ es inversible con inversa $I_{(i\to\lambda^{-1}i)}$, es decir, $I_{(i\to\lambda i)}I_{(i\to\lambda^{-1}i)} = I_{(i\to\lambda^{-1}i)}I_{(i\to\lambda i)} = Id$.

(iii_2). Sea $I^{[i\to\lambda i]}$ la matriz que obtenemos al multiplicar la columna i por $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ en la matriz identidad. Entonces $AI^{[i\to\lambda i]}$ es la matriz que obtenemos al multiplicar la columna i por λ en A. Notar que $I^{[i\to\lambda i]}$ es inversible con inversa $I^{[i\to\lambda^{-1}i]}$, es decir, $I^{[i\to\lambda i]}I^{[i\to\lambda^{-1}i]} = I^{[i\to\lambda^{-1}i]}I^{[i\to\lambda i]} = Id$.

Demo: Es una mera comprobación.

Nota: El producto de matrices inversibles es inversible. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son inversibles con inversas A^{-1} y B^{-1} entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

8.3 TEOREMA. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces haciendo transformaciones elementales en A obtenemos una matriz tipo $A' = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es más, como hacer transformaciones elementales es multiplicar por matrices inversible, A' es equivalente a A y por tanto $r = \text{Rang}(A)$.

Demo: La demostración de este teorema es precisamente el algoritmo que nos permitirá abordar un caso particular. Sea $A = (a_{ij})$, entonces:

1-. Si $A = 0$ no tenemos nada que demostrar. En caso contrario existe un $a_{ij} \neq 0$. haciendo cambios en filas y en columnas colocamos este elemento en el lugar $(1, 1)$. (transformaciones tipo I.

2-. Multiplicamos la fila 1 (o la columna 1) por un escalar adecuado para que en el lugar $(1, 1)$ aparezca el uno. Transformación tipo III.

3-. Haciendo transformaciones tipo II, hacemos ceros en la primera columna y después en la primera fila.

4-. Obtenemos una matriz en la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$. repetimos entonces los pasos de 1 a 3 en A'. ■

Nota: Aplicando los dos teoremas anteriores, (8.2) y (8.3), para obtener las matrices P y Q, solo tenemos que ir apuntando, convenientemente, las transformaciones elementales que vamos haciendo. Por tanto, si colocamos la matriz A, la matriz identidad de tamaño n y la matriz identidad de tamaño m en la forma:

$$\begin{matrix} Id_m & A \\ & Id_n \end{matrix}$$

y al hacer en A un cambio por filas, lo hacemos en toda la fila, y si al hacer en A un cambio por columnas lo hacemos en toda la columna, las matrices que nos aparecen al terminar este proceso serán precisamente Q y P. Es decir,

$$QAP = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.4 COROLARIO. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matriz inversible. Entonces haciendo cambios sólo por filas (o sólo por columnas) podemos calcular la inversa de A.

Bibliografía

P. Alberca, D. Martín: "Métodos Matemáticos", *Ediciones Aljibe*, 2001.

E. Hernandez: "Álgebra y Geometría", *Addison-Wesley*, 1994.

M. Castellet, I. Llerena: "Álgebra lineal y Geometría", *Reverté*, 1991.