Indice

- Cuerpos.
- El anillo de congruencias módulo n, $(\mathbb{Z}_n, +, \ )$

7. **Sistemas de Ecuaciones Lineales.**
   - Definición y ejemplos. Conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.
   - S.E.L compatible, determinado e indeterminado, E.E.L incompatible.
   - Sistema de ecuaciones lineales equivalentes. Transformaciones elementales.
   - El método de Gauss.

Bibliografía del Tema 1

Tema 2.

1. **Introducción.**
2. **Espacios vectoriales.**
   - Definición y ejemplos.
   - Propiedades de los espacios vectoriales.
3. **Subespacio vectorial.**
   - Definición y ejemplos.
   - Caracterizaciones.
4. **Operaciones con subespacios**
   - La intersección. La suma. La suma directa. Propiedades.
5. **Base de un espacio vectorial**
   - Subespacio generado por un subconjunto de vectores. Combinación lineal. Propiedades.
   - Sistema de generadores. Conjunto de vectores independientes. Base de un espacio vectorial. Ejemplos.
   - Teorema de existencia de base. Lema de Zorn.
   - Coordenadas.
6. **Dimensión de un espacio vectorial**

- Teoremas de Steinitz o teorema del intercambio.
- Dimensión de un espacio vectorial. Ejemplos.

7. **Ecuaciones de un subespacio de $\mathbb{K}^n$**
   - Ecuaciones vectoriales, paramétricas, continuas y cartesianas. Ejemplos.

Bibliografía del Tema 2

TEMA 3.

1. **Introducción.**
2. **Aplicaciones Lineales.**
   - Definición y ejemplos. La aplicación lineal asociada a una matriz.
   - Propiedades.
   - Monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo, endomorfismos y automorfismo de espacios vectoriales. Espacios vectoriales isomorfos.
3. **Núcleo e imagen de una aplicación lineal.**
   - La imagen y la imagen inversa de un subespacio por una aplicación lineal.
   - $Ker(f)$ e $Im(f)$ para f aplicación lineal.
   - Primera caracterización de monomorfismo y epimorfismo. (Dualidad)
4. **Fabricación de aplicaciones lineales**
   - Como fabricar aplicaciones lineales.
   - caracterización de una aplicación lineal a partir de la imagen de una base.
   - Segunda caracterización de monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo.
5. **Matriz asociada a una aplicación lineal**
   - El isomorfismo "coordenado". Si B es base de V, f_B.
   - La matriz (el isomorfismo) de cambio de base. (de B a B', $C_{B'B}$).
   - Matriz asociada a aplicaciones lineales de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$, A^f, (respecto de las bases canónicas).
   - Matriz asociada a aplicaciones lineales de V en W respecto de bases B (de V) y B' (de W), $A^f_{B'B}$.
   - Relación al cambiar de base, $A^f_{B'B} = C_{B'\hat{B}'}A^f_{\hat{B}'\hat{B}}C_{\hat{B}B}$

6. **Nuevos espacios vectoriales**
   - El producto cartesiano de espacios vectoriales. Propiedad fundamental de Producto cartesiano.
   - La suma directa externa de espacios vectoriales. Propiedad fundamental de la suma directa externa. (Dualidad)
   - El espacio vectorial cociente. Base del espacio vectorial cociente. Propiedad fundamental del cociente.
   - El espacio vectorial $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Relación con el espacio vectorial de las matrices triangulares.
   - Relación entre la composición de aplicaciones lineales y el producto de sus matrices asociadas.
   - El espacio vectorial $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$. Relación con el espacio vectorial de las matrices cuadradas.
   - El espacio vectorial $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}, V)$
   - El espacio vectorial dual, $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$.
   - El segundo dual, V^{**}. Monomorfismo canónico de V en V^{**}.
7. **Rango de una aplicación lineal**

TEMA 1.

1. INTRODUCCIÓN

Comenzamos este primer tema con una breve introducción a la teoría de conjuntos, ya que ésta es necesaria a lo largo de la asignatura. Seguidamente introduciremos la noción de cuerpo lo que nos permitirá hacer un estudio general de los sistemas de ecuaciones lineales y su resolución. Este estudio es necesario ya que cuando entremos propiamente en el mundo del álgebra lineal la mayoría de los problemas van a consistir, en último término, en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales (S.E.L). Damos en este primer capítulo nociones generales sobre S.E.L e introducimos el método de Hermite-Gauss, que a la vez de no necesitar una teoría subyacente complicada, es efectivo a la hora de resolver este tipo de sistemas de ecuaciones.

2. CONJUNTOS.

En este capítulo vamos a dar, sin ser muy estrictos, algunas nociones necesarias para la comprensión de la asignatura.

2.1. Def: Se define un conjunto como una colección de objetos. Un conjunto quedará determinado por una propiedad que caracterice a los elementos que lo forman.

2.2. Ejemplos.

(a) El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$.

(b) El conjunto de los números naturales que son pares.

(c) $A = \{1, 2, a\}; B = \{a, b, c\}; C = \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

2.3. Notación: En general, los conjuntos los denotaremos por letras mayúsculas mientras que los elementos serán denotados por letras minúsculas.

2.4. Def: Diremos que un elemento a *pertenece* a un conjunto X, y lo denotaremos por $a \in X$, si a es uno de los miembros de X. Si a no es miembro de X diremos que a *no pertenece* a X y lo denotaremos por $a \notin X$.

2.5. Def: Sean X, Y dos conjuntos. Diremos que X es un *subconjunto* de Y, y lo representaremos por $X \subset Y$, si todo elemento de X es elemento de Y, es decir,

$$X \subset Y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall a \in X, \; \Rightarrow \; a \in Y$$

2.6. Def: Sean X, Y dos conjuntos. Diremos que X es igual a Y, y lo representaremos $X = Y$, si $X \subset Y$ e $Y \subset X$.

2.7. Def: Definimos el conjunto vacío como aquél que carece de elementos, lo representamos por $\emptyset$.

2.8. Def: Dado un conjunto X definimos el conjunto partes de X, y lo representamos por $\mathcal{P}(X)$ como el conjunto que tiene por elementos los subconjuntos de X.

2.9. Ejemplo. Para $A = \{1, 2, a\}$, se tiene que

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{a\}, \{1,2\}, \{1,a\}, \{2,a\}, \{1,2,a\}\}.$$

Observar que si un conjunto X tiene n elementos, $\mathcal{P}(X)$ tiene 2^n elementos.

3. OPERACIONES CON CONJUNTOS

3.1. Def: Dados dos conjuntos X, Y, se define la unión de X con Y y se representa por $X \cup Y$ a un nuevo conjunto que tiene por elementos tanto los elementos de X como los de Y.

$$X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ ó } z \in Y\}$$

3.2. Def: Dados dos conjuntos X, Y, se define la intersección de X con Y y se representa por $X \cap Y$ a un nuevo conjunto que tiene los elementos que están tanto en X como en Y.

$$X \cap Y = \{z \mid z \in X \text{ y } z \in Y\}$$

3.3. Def: Dados dos conjuntos X, Y, se define la diferencia de X con Y y se representa por $X - Y$ al conjunto formado por los elementos de X que no están en Y. Es decir,

$$X - Y = \{z \in X \mid z \notin Y\}$$

3.4. Def: Dados dos conjuntos X, Y, se define la diferencia simétrica de X con Y y se representa por $X \triangle Y$ al conjunto formado por los elementos de X que no están en Y junto con los de Y que no están en X. Es decir,

$$X \triangle Y = (X \cup Y) - (Y \cap X) = (X - Y) \cup (Y - X)$$

3.5. Def: Dados dos conjuntos X, Y, con X subconjunto de Y se define el complemento de X en Y y se representa por $\overline{X}$ al conjunto formado por los elementos de Y que no están en X. Es decir,

$$\overline{X} = \{z \in Y \mid z \notin X\}$$

Observar que $\overline{X} = Y - X$.

3.6. Def: Dados dos conjuntos X, Y se define el producto cartesiano de X e Y y se representa por $X \times Y$ como un nuevo conjunto formado por todos los pares (x, y) en donde $x \in X$ e $y \in Y$.

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

Observar que si X tiene n elementos e Y tiene m elementos, $X \times Y$ tiene nm elementos.

3.7. Ejemplo. Dados $A = \{1, 2, a\}$ y $B = \{a, b, c\}$ se tiene que

$$A \times B := \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (a, a), (a, b), (a, c), \}$$

3.8. Def: Dados n conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se define el producto cartesiano de los X_i con $i = 1, 2, \ldots, n$ y se representa por $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \Pi_{i=1}^n X_i$ como un nuevo conjunto formado por todas las n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en donde $x_i \in X_i$ con $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\Pi_{i=1}^n X_i := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i \text{ con } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

4. PROPIEDADES

(i) Propiedad conmutativa: $X \cup Y = Y \cup X; \quad X \cap Y = Y \cap X.$

(ii) Propiedad asociativa: $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z).$$

(iii) Propiedad distributiva: $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$

$$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

(iv) Propiedad Idempotente: $X \cup X = X; \quad X \cap X = X.$

(v) Leyes de simplificación: $(X \cup Y) \cap X = X; \quad (X \cap Y) \cup X = X.$

(vi) Leyes de Morgan: $\overline{(X \cup Y)} = \overline{X} \cap \overline{Y}; \quad \overline{(X \cap Y)} = \overline{X} \cup \overline{Y}.$

5. FUNCIONES

5.1. Def: Dados dos conjuntos no vacíos X, Y, se define una función f de X en Y, y se representa por $f : X \to Y$, como un subconjunto $F \subset X \times Y$ tal que para todo $x \in X$ existe un único $y \in Y$ con $(x, y) \in F$ (este elemento y no es más que lo que usualmente llamamos $f(x)$).

Observación: Una aplicación no es más que una regla por la cual a cada elemento de X se le asigna un y sólo un elemento de Y.

5.2. Ejemplos.

- ⋆ Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = 2n + 1$.
- ⋆ Sea X un conjunto no vacío y x_0 un elemento de X. entonces tenemos dos aplicaciones naturales:
  - La aplicación identidad. $Id_X : X \to X$ definida por $Id_X(x) = x$ para todo $x \in X$.
  - La aplicación constante. $f_{x_0} : X \to X$ definida por $f(x) = x_0$ para todo $x \in X$.

5.3. Def: Diremos que una aplicación $f : X \to Y$ es inyectiva si $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$.

5.4. DEF: Diremos que una aplicación $f : X \to Y$ es sobreyectiva si para todo $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

5.5. DEF: Diremos que una aplicación $f : X \to Y$ es biyectiva si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

5.6. EJEMPLOS.

(1). La aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$ es biyectiva.

(2). La aplicación $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = 2x + 1$ es sólo inyectiva. No existe ningún natural n tal que $f(n) = 4$.

(3). La aplicación $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva. $h(2) = h(-2)$ por lo que no es inyectiva y no existe ningún elemento $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -1$, por lo que no es sobreyectiva.

5.7. DEF: Sean X, Y, Z tres conjuntos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos aplicaciones. Se define la composición de f con g y se representa por $g \circ f$ como la aplicación $g \circ f : X \to Z$ definida por $g \circ f(x) := g(f(x))$ para todo $x \in X$.

5.8. LEMA. La composición de aplicaciones es asociativa.

Nota: la composición de aplicaciones no es necesariamente conmutativa, pero posee una especie de elemento unidad. Si $f : X \to Y$ es una aplicación $Id_Y \circ f = f$ y $f \circ Id_X = f$, en donde Id_X (resp. Id_Y) denotan la aplicación identidad en X (Resp. en Y).

5.9. DEF: Sean X e Y dos conjuntos y $f : X \to Y$ una aplicación. Diremos que f es inversible si existe una aplicación $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = Id_Y$ y $g \circ f = Id_X$.

5.10. PROPOSICIÓN. Sean X, Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) f es biyectiva.

(2) Existe una aplicación $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = Id_Y$ y $g \circ f = Id_X$.

Es más, la aplicación g es única, por lo que la denotaremos por f^{-1}.

5.11. DEF: Sean X, Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. dado un subconjunto Y' de Y se define la imagen inversa de Y' y se denota por $f^{-1}(Y')$ como:

$$f^{-1}(Y') := \{x \in X \mid f(x) \in Y'\}$$

Nota: para esta definición no hace falta que f sea biyectiva y tenga inverso, $f^{-1}(Y')$ es sólo una notación (puede que mala) que no es la aplicación inversa.

6. LA NOCIÓN DE CUERPO

6.1. DEF: Sea R un conjunto no vacío. Una operación interna en R, que denotaremos por $*$, es una aplicación del producto cartesiano $R \times R$ en R.

6.2. EJEMPLOS CONOCIDOS: La suma o el producto usuales en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. La unión y la intersección en el conjunto de partes de un conjunto, $\mathcal{P}(X)$.

6.3. PROPIEDADES. Sea R un conjunto no vacío y $*$ una operación en R. Diremos que $*$ es:

– **Asociativa:** para todo $x, y, z \in R$ se verifica que $(x * y) * z = x * (y * z)$.

– **Conmutativa:** para todo $x, y \in R$ se verifica que $x * y = y * x$.

– **Existencia de elemento neutro:** se dice que $*$ posee elemento neutro si existe $e \in R$ tal que para todo $x \in R$, $\quad x * e = e * x = x$

Nota: El elemento neutro de existir es único.

– **Existencia de inverso (u opuesto):** si $*$ es una operación que posee elemento neutro, digamos e, se dice que $x \in R$ posee inverso (u opuesto) si existe $y \in R$ tal que $\quad x * y = y * x = e$.

Se dice que $*$ posee inverso si todo elemento de R posee inverso.

6.4. EJERCICIO. Di que propiedades verifican las operaciones dadas en (6.2.).

6.5. DEF: Sea G un conjunto y $*$ una operación en G. se dice que $(G, *)$ es un *grupo* si $*$ es asociativa, posee elemento neutro y todo elemento posee inverso. Se dice que $(G, *)$ es un *grupo abeliano* (o conmutativo) si además, $*$ es conmutativa.

6.6. EJEMPLOS. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q} - \{0\},\ )$, $(\mathbb{R} - \{0\},\ )$ son grupos abelianos. El conjunto de aplicaciones biyectivas en un conjunto con al menos 3 elementos es un grupo no abeliano. $(\mathbb{Q},\ )$ no es un grupo.

Estamos acostumbrados, cuando trabajamos con las operaciones usuales en conjuntos de "números" o en ciertas estructuras algebraicas (como puede ser el conjunto de las matrices) trabajar no con una única operación, sino con varias que interrelacionan (normalmente la suma y el producto). Siguiendo esta ideal se introduce la noción de anillo:

6.7. Def: Sea R un conjunto no vacío con dos operaciones "+" y " " a la primera operación se la suele denominar suma y a la segunda producto. Diremos que $(R, +, \ )$ es un anillo si:

– $(R, +)$ es un grupo abeliano.

– la segunda operación es asociativa.

– Se verifican la propiedad distributivas: para todo $x, y, z \in R$

$$(x + y)z = xz + yz \qquad z(x + y) = zx + zy.$$

Nota: Al neutro de la suma se le denotará por 0.

6.8. Lema. Sea $(R, +, \ )$ un anillo. Entonces para todo $x \in R$ se tiene que $0x = x0 = 0$.

⋆ Diremos que un anillo $(R, +, \ )$ es unitario si la segunda operación posee elemento unidad. A la unidad se la denotará normalmente por 1.

⋆ Diremos que un anillo $(R, +, \ )$ es conmutativo si la segunda operación es conmutativa.

⋆ Diremos que un anillo $(R, +, \ )$ es de división si todo elemento no nulo de R tiene inverso.

⋆ Diremos que un anillo $(R, +, \ )$ es un cuerpo si es un anillo de división conmutativo.

Nota: Un anillo $(R, +, \ )$ es un cuerpo si y sólo si:

– $(R, +)$ es un grupo abeliano.

– $(R^*, \ )$ es un grupo abeliano. $\qquad (R^* := R - \{0\})$

Nota: Un cuerpo se comporta exactamente como $\mathbb{Q}$, los números racionales o $\mathbb{R}$, los números reales, es decir, en un cuerpo podemos sumar, restar, multiplicar y dividir (eso si, por elementos no nulos).

6.9. Ejemplos. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ son anillos unitarios. $2\mathbb{Z} := \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ es un anillo no unitario. El conjunto de matrices cuadradas sobre un anillo cualquiera, con su suma y su producto usual es un anillos, que denotamos por $\mathcal{M}_n(R)$ con R un anillo (observar que este último anillo no es conmutativo para $n > 1$).

6.10. Ejemplo. Los anillos realmente no tienen que ser de "números". Sea X un conjunto no vacío y denotemos por $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X. Entonces $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ tiene estructura de anillo conmutativo y unitario.

Nota: el anillo anterior no es un cuerpo salvo que X tenga un único elemento.

6.11. Ejemplo: los anillos módulo n Sea n un número natural y consideremos $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Observar que $\mathbb{Z}_n$ tiene n elementos. Dados $a, b \in \mathbb{Z}_n$ definimos:

– La suma de a y b como el resto de dividir $a + b$ por n.

– El producto de a y b como el resto de dividir ab por n.

Entonces $(\mathbb{Z}_n, +, \ )$ tiene estructura de anillo conmutativo y unitario. Es más, se demostrara en la asignatura de introducción al álgebra que si $n = p$ es un número primo, $(\mathbb{Z}_p, +, \ )$ es un cuerpo (con p elementos).

7. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sea K un cuerpo (se puede tener en mente el cuerpo de los racionales, de los reales o de los complejos). A los elementos del cuerpo los llamaremos escalares.

7.1. Definición. Por una *ecuación lineal* en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (con n incognitas) entenderemos una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

en donde $a_1, a_2, \ldots a_n, b \in K$ son llamados los coeficientes de la ecuación. Un *sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas* será una expresión:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

en donde m es el número de ecuaciones y n el número de incógnitas.

Se dice que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ (en este orden) es una solución del sistema si:

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n &= b_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2n}\lambda_n &= b_2 \\ \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mn}\lambda_n &= b_m \end{aligned}$$

Es decir, si al "sustituir" cada una de las variables por los valores dados todas las igualdades se satisfacen.

Al conjunto de todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales se le denominará el *conjunto solución* del sistema, que denotaremos por S.

7.2. Un sistema de ecuaciones lineales se dirá que es *incompatible* si no posee soluciones, *compatible determinado* si su conjunto solución posee un único elemento y *compatible indeterminado* si posee más de un elemento.

Nota: Al trabajar en el cuerpo de los racionales, de los reales, o de los complejos, un sistema de ecuaciones lineales puede tener o 0 soluciones, o una solución o infinitas soluciones. En general esta propiedad no es cierta. Hay cuerpos en donde un sistema de ecuaciones lineales (un sistema compatible indeterminado) puede tener un número finito de soluciones, es decir, más de una y menos de infinitas.

Ejemplo en $\mathbb{Z}_7$, la ecuación $x + y = 1$ tiene por conjunto de soluciones

$$S = \{(0,1), (1,0), (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}.$$

7.3. Diremos que dos sistemas de ecuaciones lineales son *equivalentes* si poseen el mismo conjunto de soluciones.

Nos vamos a centrar ahora en "manipular" sistemas de ecuaciones lineales, pasando de un sistema a otro equivalente, y más simple, hasta obtener uno que nos permita calcular su conjunto solución.

7.4. TEOREMA. Las siguientes manipulaciones en un sistema de ecuaciones lineales proporcionan sistemas de ecuaciones lineales equivalentes:

(i) Intercambiar la ecuación i-esima por la j-esima.

(ii) Multiplicar una de las ecuaciones lineales por un escalar no nulo.

(iii) Sumarle a la ecuación i-esima la ecuación j-esima multiplicada por un escalar.

7.5. Método de Gauss. Vamos a dar en este apartado un “algoritmo” que nos va a permitir encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales: Sea

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

un sistema de ecuaciones lineales.

Paso 1 Nos fijamos en la primera columna y nos quedamos con una ecuación que tenga coeficiente no nulo. Cambiamos esta ecuación por la que esté en primer lugar.

Paso 2 Multiplicamos la primera ecuación, que ahora tiene coeficiente en la primera variable no nulo, por el inverso de este coeficiente. Así obtenemos una nueva primera ecuación con coeficiente uno en la primera variable.

⋆ Si en el primer paso cambiamos una ecuación con coeficiente uno, nos ahorramos este segundo paso.

Paso 3 Restamos a la ecuación i-esima la ecuación primera multiplicada por el coeficiente primero de esta ecuación i-esima. Nos queda un nuevo sistema (equivalente al primero) que en la primera columna tiene un uno en la primera ecuación y un cero en todas las demás.

Paso 4 Nos olvidamos de la primera ecuación y repetimos el proceso con las ecuaciones restantes.

Pasa 5 Terminado el proceso resuelvo el sistema (hacia arriba).

Visto que la explicación de este algoritmo es “molesta” veamos un ejemplo practico del mismo:

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 5z &= 10 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x + 4y + z &= 7 \end{aligned}$$

Paso 1 Cambio la segunda ecuación por la primera. Podía pasar directamente al paso dos, pero entonces aparecerían decimales, que son mas molestos para trabajar.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 5z &= 10 \\ 2x + 4y + z &= 7 \end{aligned}$$

Paso 2 No hace falta.

Paso 3 Resto a la segunda ecuación la primera multiplicada por tres y a la tercera ecuación la primera multiplicada por dos:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ -y + 2z &= 1 \\ 2y - z &= 1 \end{aligned}$$

Paso 4 Trabajo ahora con las dos últimas ecuaciones:

Paso 1 No hace falta.

Paso 2 Multiplico la segunda ecuación por -1.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y - 2z &= -1 \\ 2y - z &= 1 \end{aligned}$$

Paso 3 A la tercera ecuación le resto la segunda multiplicada por dos.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y - 2z &= -1 \\ 3z &= 3 \end{aligned}$$

Paso 5 De la última ecuación, $z = 1$. Sustituyo en la segunda ecuación $z = 1$ y obtengo $y = 1$. Sustituyo $z = 1$ e $y = 1$ en la primera ecuación y obtengo, $x = 1$. Luego era un sistema compatible determinado. Única solución $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

Nota: Naturalmente los sistemas de ecuaciones lineales del examen serán más difíciles.

7.6. Una vez terminado el algoritmo de Gauss nos vamos a encontrar con un sistema de ecuaciones en forma “triangular”.

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \dots & +a_{1(n-1)}x_{n-1} & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \dots & +a_{2(n-1)}x_{n-1} & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
 & & +a_{33}x_3 & + & \dots & +a_{3(n-1)}x_{n-1} & +a_{3n}x_n & = b_3 \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & +a_{(n-1)n}x_n & = b_{n-1} \\
 & & & & & & a_{(n-1)n}x_n & = b_n
\end{array}
$$

$\star$ La solución del sistema se obtiene “despejando las variables de abajo para arriba”.

BIBLIOGRAFÍA

[1] **E. Hernández:** “Álgebra y Geometría”, *Addison-Wesley*, 1994.

[2] **M. Castellet, I. Llerena:** “Álgebra lineal y Geometría”, *Reverte*, 1991.

[3] **Seymour Lipschutz:** “Álgebra Lineal”, *McGraw-Hill*, 1993.

[4] **David C. Lay:** “Álgebra Lineal y sus aplicaciones”, *Addison Wesley Longman*, 1999.

Nota: En general cualquier libro sobre *Álgebra Lineal* o *Geometría* tratará estos temas.

TEMA 2.

1. INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a introducir la noción de espacio vectorial dando los ejemplos más relevantes de los mismos. Aparecerá la noción de subespacio vectorial (que entre otras cosas serán nuevos ejemplos de espacios vectoriales), así como la obtención de nuevos subespacios a partir de unos dados “lo que llamaremos operaciones entre subespacios”. Aparecerán los conceptos de subespacio generado, sistema generador y conjunto de vectores independientes, que nos llevarán a la definición de bases de un espacio vectorial y por el teorema de invariabilidad del número de elementos entre distintas bases de un espacio vectorial, obtendremos la noción de dimensión de un espacio vectorial. Concluiremos obteniendo nuevos ejemplos de espacios vectoriales a partir de otros, la suma directa de espacios vectoriales, el producto de espacios vectoriales y el espacio vectorial cociente.

2. ESPACIO VECTORIAL. SUBESPACIO VECTORIAL. EJEMPLOS

2.1. Def: Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y V un conjunto no vacío con dos operaciones, una interna $+ : V \times V \to V$ y otra externa $\mathbb{K} \times V \to V$ tal que:

$\star$ La operación interna (también llamada suma) tiene estructura de grupo abeliano, es decir,

(1.1) Propiedad asociativa: $(u+v)+w = u+(v+w) \quad \forall\ u, v, w \in V$.

(1.2) Existencia de elemento neutro: $\exists\ \overline{0} \in V$ tal que $\forall\ v \in V, \quad \overline{0}+v = v+\overline{0} = v$.

(1.3) Existencia de elemento opuesto: $\forall\ v \in V,\ \exists\ -v \in V$ tal que $(-v)+v = v+(-v) = \overline{0}$.

(1.4) Propiedad conmutativa: $u+v = v+u \quad \forall\ u, v \in V$.

$\star$ La operación externa (producto por escalares) verifica,

(2.1) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v \quad \forall\ u, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$.

(2.2) $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v \quad \forall\ v \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(2.3) $1v = v \quad \forall\ v \in V$.

(2.4) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad \forall\, v \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Nota: A los elementos de V los llamaremos vectores. A los elementos del cuerpo los llamaremos escalares.

2.2. Ejemplos.

1-. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}^n$ con la suma y producto por escalares "usuales" tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}^n := \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \mid \lambda_i \in \mathbb{K},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

$\star$ Suma por componentes:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \mu_2 \ldots, \mu_n) := (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots, \lambda_n + \mu_n)$$

$\star$ Multiplicación por escalares:

$$\mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) := (\mu\lambda_1, \mu\lambda_2, \ldots, \mu\lambda_n)$$

Nota: Si $n = 1$ tenemos que $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre sí mismo. $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, en donde $\mathbb{R}$ es el cuerpo de los números Reales son espacios vectoriales que ya se conocen (estudiados en física).

2-. El conjunto $\{\overline{0}\}$ es espacio vectorial para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, con la única suma y multiplicación por escalares posible:

$$\overline{0} + \overline{0} = \overline{0} \quad \text{y} \quad \lambda\overline{0} = \overline{0} \quad \text{para todo} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

3-. $\mathbb{R}$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ con la suma y productos usuales.

4-. En $\mathbb{R}^3$ cualquier "recta" o cualquier "plano" que pase por el origen de coordenadas. Ejemplo:

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + x = 0\}$$

5-. Dado $\mathbb{R}$ el cuerpo de los reales (o cualquier cuerpo $\mathbb{K}$), el anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ (en $\mathbb{K}$).

6-. El conjunto de sucesiones de números reales es un espacio vectorial real.

7-. Si $[a, b]$ es un intervalo de $\mathbb{R}$. El conjunto de aplicaciones continuas de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real.

8-. El conjunto de las matrices de tamaño $n \times m$ sobre los reales es un espacio vectorial real.

2.3. Propiedades de los espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $u, v \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Entonces:

(i) $0v = \overline{0}$.

(ii) $\lambda\overline{0} = \overline{0}$.

(iii) $(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v)$.

(iv) $\lambda v = \overline{0}$ implica que $\lambda = 0$ o $v = \overline{0}$.

(v) $\lambda v = \lambda u$ y $\lambda \neq 0$ implica que $u = v$.

(vi) $\lambda v = \mu v$ y $v \neq \overline{0}$ implica que $\lambda = \mu$.

Demo:(i). Vamos a jugar con el hecho de que $0 + 0 = 0$ y la propiedad (2.2).

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$$

por tanto, si restamos en ambos lados $0v$, es decir, sumamos el opuesto de $0v$, y aplicamos la propiedad asociativa, tenemos que:

$$0 = 0v + (-0v) = (0v + 0v) + (-0v) = 0v + (0v + (-0v)) = 0v + \overline{0} = 0v.$$

(ii). Es una demostración bastante simétrica. Vamos a jugar con el hecho de que $\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$ y la propiedad (2.1).

$$\lambda\overline{0} = \lambda(\overline{0} + \overline{0}) = \lambda\overline{0} + \lambda\overline{0}$$

por tanto, si restamos en ambos lados $-\lambda\overline{0}$, es decir, sumamos el opuesto de $\lambda\overline{0}$, y aplicamos la propiedad asociativa, tenemos que:

$$\overline{0} = \lambda\overline{0} + (-\lambda\overline{0}) = (\lambda\overline{0} + \lambda\overline{0}) + (-\lambda\overline{0}) = \lambda\overline{0} + (\lambda\overline{0} + (-\lambda\overline{0})) = \lambda\overline{0}$$

(iii). (iv). (v) y (vi) pueden ser encontrados en [3, Teorema 3.1]. ■

3. SUBESPACIO VECTORIAL

3.1. DEF: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que un subconjunto W de V es un subespacio vectorial de V, y lo denotaremos $W \leq V$, si W con la suma y el producto inducido tiene estructura de espacio vectorial.

Nota: Tenemos entonces que para que un subconjunto W de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ sea un subespacio vectorial debe de cumplir:

$\star$ La suma de V tiene sentido en W. Es decir, al sumar vectores de W no nos "salimos" de W:

$$\forall\ w_1, w_2 \in W \quad \Longrightarrow \quad w_1 + w_2 \in W$$

$\star$ La multiplicación de V tiene sentido en W. Es decir, al multiplicar un escalar de $\mathbb{K}$ por un vector de W no nos "salimos" de W:

$$\forall\ w \in W,\ \lambda \in \mathbb{K} \quad \Longrightarrow \quad \lambda w \in W$$

Y además se verifiquen las 8 propiedades de espacio vectorial, a saber:

Respecto de la suma:

(1.1) Propiedad asociativa: $(w_1 + w_2) + w_3 = w_1 + (w_2 + w_3) \quad \forall\ w_1, w_2, w_3 \in W$.

(1.2) Existencia de elemento neutro, es decir, exista un elemento en W que haga de neutro.

(1.3) Existencia de elemento opuesto, es decir, para cada elemento de W exista otro elemento de W que haga de neutro.

(1.4) Propiedad conmutativa: $w_1 + w_2 = w_2 + w_1 \quad \forall\ w_1, w_2 \in W$.

Respecto del producto por escalares tenemos: si $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ y $w_1, w_2 \in W$,

(2.1) $\lambda(w_1 + w_2) = \lambda w_1 + \lambda w_2$.

(2.2) $(\lambda + \mu)w_1 = \lambda v + \mu w_1$.

(2.3) $1w_1 = w_1$.

(2.4) $\lambda(\mu w_1) = (\lambda\mu)w_1$.

Nota: La idea de que W sea subespacio vectorial es que podamos restringir las operaciones de V a W y con estas operaciones W tenga estructura de espacio vectorial.

No obstante, la propiedad (2.3) se verifica para todo elemento de V, por tanto también se verificará para todo elemento de W. Por la misma razón siempre se verifican: (1.1), (1.4), (2.1), (2.2) y (2.4). Es más, si suponemos que se verifican (1) y (2), y $W \neq \emptyset$, dado $w \in W$ y $0 \in \mathbb{F}$, por (2), $0w = \overline{0} \in W$, con lo que si que existe el elemento neutro en W, es más, es el mismo que en V. Y $(-1)w = -w \in W$, con lo también tenemos el opuesto de cada elemento de W. Por tanto, y resumiendo la información tenemos:

3.2. TEOREMA. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea W un subconjunto de V. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) W es un subespacio vectorial de V.

(2) i-. $W \neq \emptyset$.

ii-. Para todos $w_1, w_2 \in W$ se tiene que $w_1 + w_2 \in W$.

iii-. Para todos $w \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene que $\lambda w \in W$.

(3) i-. $W \neq \emptyset$.

ii-. Para todos $w_1, w_2 \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene que $\lambda w_1 + w_2 \in W$.

3.3. LEMA. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio vectorial de V. Entonces V y W tienen el mismo elemento neutro para la suma, es decir, $\overline{0} \in W$.

3.4. EJEMPLOS.

1-. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces tenemos los subespacios triviales: $\{\overline{0}\}$ y V.

2.- Dado un $v \in V$ tenemos que $\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ es un subespacio vectorial.

3-. Sea $\mathbb{R}^3$ con las operaciones usuales de suma y producto por escalares. Entonces

$$W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio vectorial.

4-. Sea $\mathbb{R}^4$ con las operaciones usuales de suma y producto por escalares. Entonces

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

4. OPERACIONES CON SUBESPACIOS

En este apartado vamos a obtener nuevos subespacios vectoriales a partir de un otros dados.

4.1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_1, W_2 dos subespacios de V. Nos planteamos encontrar un nuevo subespacio de V que sea el más grande contenido tanto en W_1 como en W_2.

Es claro que el conjunto más grande contenidos en ambos es la intersección. Veamos que éste es a la vez el subespacio mayor.

4.2. Proposición. La intersección de dos subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

Demo. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_1, W_2 dos subespacios de V. Dados $w_1, w_2 \in W_1 \cap W_2$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que $\lambda w_1 + w_2 \in W_1$, ya que éste es un subespacio (de igual forma $\lambda w_1 + w_2 \in W_2$) por lo que $\lambda w_1 + w_2 \in W_1 \cap W_2$, lo que demuestra que $W_1 \cap W_2$ es un subespacio vectorial de V. ■

Este mismo resultado se tiene para una familia arbitraria de subespacios.

4.3. Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_i una familia de subespacios vectoriales de V, con $i \in I$. Entonces $\cap_{i\in I} W_i$ es un subespacio vectorial de V. Es más $\cap_{i\in I} W_i$ es el subespacio mayor de V contenido en todos los W_i.

4.4. Cabe preguntarse ahora la pregunta "dual". Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_1, W_2 dos subespacios de V. Nos planteamos encontrar un nuevo subespacio de V que sea el más pequeño que contiene tanto a W_1 como a W_2. Cabría pensar que este es la unión, pero no es cierto. Veamos un contraejemplo:

$\star$ En $\mathbb{R}^2$ consideramos $W_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{(0,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ tenemos que $(1,0) \in W_1 \cup W_2$, $(0,1) \in W_1 \cup W_2$ pero $(1,1) = (1,0) + (0,1) \notin W_1 \cup W_2$

4.5. La suma de subespacios: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_1, W_2 dos subespacios de V. Se define la *suma* de W_1 y W_2, que se representa por $W_1 + W_2$ como el conjunto

$$W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

es decir, el conjunto de todos los vectores de V que se pueden expresar como suma de un vector de W_1 y un vector de W_2.

4.6. PROPOSICIÓN. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_1, W_2 dos subespacios de V. Entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio de V. Es más, $W_1 + W_2$ es el menor subespacio de V que contiene tanto a W_1 como a W_2.

4.7. Si nos encontramos con una familia de subespacios, también podemos construir este subespacio. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_i, con $i \in I$, una familia de subespacios de V. Se define la suma de los W_i que representamos por $\sum W_i$ como:

$$\sum W_i = \{\sum w_i \mid \text{con } w_i \in W_i, i \in I, \text{ todos nulos, salvo un número finito}\}$$

Nos encontramos aquí también, que $\sum W_i$ es el menor subespacio de V que contiene a todos los W_i.

4.8. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean W_1, con $i \in I$, una familia de subespacios de V. Diremos que la suma de los W_i es directa si:

$$(\sum_{i \in I - \{k\}} W_i) \cap W_k = 0 \quad \forall\ k \in I.$$

5. BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

En este apartado vamos a introducir el concepto de base en un espacio vectorial. Vamos a dar distintas caracterizaciones de base y vamos a demostrar, haciendo uso del Lema de Zorn, que todo espacio vectorial posee una base.

5.1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea S un subconjunto de V. Nos planteamos ahora encontrar el menor subespacio de V que contiene a S (antes buscábamos el menor subespacio que contenía a una serie de subespacios). Caso de que exista, lo denotaremos por $< S >$, llamado el subespacio generado por S.

5.2. PROPOSICIÓN. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea S un subconjunto de V. Entonces existe el subespacio generado por S.

Demo: Consideremos $\Delta = \{W_i \mid W_i \text{ subespacio de } V \text{ que contiene a } S\}$ (indizado en el conjunto I) el conjunto de todos los subespacios de V que contienen a S. Δ es no vacío, ya que $V \subset \Delta$. Consideremos $W := \cap_{i\in I} W_i$, la intersección de todos los subespacios de V que contienen a S. Es claro que W es un subespacio de V (la intersección de subespacios es un subespacio) que contiene a S y claramente si U es un subespacio de V que contiene a S, $U \in \Delta$ y por tanto $W \subset U$, por lo que W es el menor. ■

La proposición anterior nos demuestra que el subespacio generado por cualquier conjunto S siempre existe. No obstante no nos da un camino para averiguar quién es. Veamos que podemos construir de forma explícita el subespacio vectorial generado por un conjunto S.

5.3. Def: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea S un subconjunto de V. Se define una combinación lineal de elementos de S como cualquier expresión:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \quad \text{con} \quad v_i \in S, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

En ocasiones también se le denomina combinación lineal al vector v que define la combinación lineal, $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k$.

Nota 1: Observar que siempre podemos considerar que en una combinación lineal no se repiten vectores de S, ya que en caso de que se repitieran por las propiedades de espacio vectoriales, los podríamos agrupar (propiedad segunda de la operación externa).

Nota 2: De ahora en adelante, cuando nos interese, supondremos que en una combinación lineal no se repiten los elementos.

5.4. Lema. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio de V. Entonces toda combinación lineal de elementos de W pertenece a W.

5.5. Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea S un subconjunto de V. Entonces $< S >$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S.

Demo: Sea U el conjunto de todas las combinaciones lineales. Es trivial que la suma de dos combinaciones lineales y que el producto de un escalar por una combinación lineal es una combinación lineal. Por tanto U es un subespacio de V. Es más, si W es un subespacio de V que contiene a S y $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k$ es una combinación lineal de elementos de $S \subset W$, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k \in W$

(por el lema anterior). Por tanto $U \subset W$ lo que demuestra que U es el menor subespacio de V que contiene a S, es decir, $U =< S >$. ∎

5.6. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que un subconjunto G es un *sistema de generadores* de V si $< G >= V$.

5.7. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que un subconjunto S es un conjunto de vectores *linealmente independientes* de V si para todos $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ distintos, y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \ldots + \lambda_k s_s = 0$$

se tiene que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Es decir, la única combinación lineal de elementos de S que es nula es la que tiene todos los escalares cero. Un conjunto de vectores S que no sea linealmente independiente se dirá que es *linealmente dependiente.*

5.8. Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea S un subconjunto de V. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) S es un conjunto de vectores independientes.

(ii) Para cada $s \in S$ se tiene que $s \notin < S - \{s\} >$.

Demo: Nombremos los elementos de $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m, \ldots\}$. Supongamos que existen unos escalares, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{F}$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v = 0.$$

Tenemos dos posibilidades:

(a). Si $\lambda_{n+1} \neq 0$. Entonces, si despejamos $\lambda_{n+1} v$ tenemos:

$$\lambda_{n+1} v = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_n v_n$$

y si ahora multiplicamos toda la igualdad por λ_{n+1}^{-1} tenemos que:

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} v_n$$

una contradicción ya que v no era combinación lineal de elementos de S. Por tanto, este caso (a) no puede darse.

(b). Tenemos entonces que $\lambda_{n+1} = 0$. Pero entonces la combinación lineal anterior es: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, lo que implica, al ser S un conjunto de vectores independientes, que $\lambda_i = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por tanto TODOS los escalares son cero, lo que prueba que $S \cup \{v\}$ es un conjunto de vectores independientes. ■

Nota: Observar que esta proposición nos dice que si un conjunto de vectores linealmente independiente de V no genera todo V, podemos añadir un nuevo vector y tener un nuevo conjunto de vectores linealmente independientes mayor.

5.9. LEMA. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea S un conjunto de vectores independientes de V y G un conjunto de generadores de V. Entonces:

(i) $\overline{0} \notin S$.

(ii) Si $S' \subset S$, entonces S' es un conjunto de vectores linealmente independientes de V.

(iii) Si $G \subset G'$, entonces G' es un conjunto de generadores de V.

Demo: (i) es trivial.

En primer lugar vamos a nombrar los elementos de cada uno de estos conjuntos. Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ y $T = \{\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$

(ii). Consideremos una combinación lineal de elementos de S igual a cero, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$, con $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Tenemos que demostrar que la única posibilidad para que esto suceda es que todos los escalares son nulos. Consideremos entonces una combinación lineal de elementos de T simplemente sumando el vector nulo de la siguiente forma, $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k + 0 v_{k+1} + \ldots + 0 v_n$. Aplicando ahora que T es un conjunto de vectores independientes tenemos que $\lambda_i = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, lo que demuestra el apartado.

(iii). Se deja como ejercicio. ■

5.10. DEF: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que un subconjunto B de V es una *base* de V si es un conjunto de generadores de V que es linealmente independiente.

Nota: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $B = \{e_i\}_{i \in I}$ una base de V (puede que infinita). Tenemos entonces que todo elemento de V se escribe como combinación lineal de elementos de B. Por tanto para cada $v \in V$ existen unos elementos de B, $e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, \ldots, e_{\alpha_n} \in B$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{\alpha_i}$. Para no preocuparnos de cuáles serán los elementos de B que entrarán en la combinación lineal de un v, escribiremos

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

y supondremos casi todos los λ_i son ceros (todos menos un número finito). No son cero exactamente los de la combinación lineal que nos daba v.

5.11. Ejemplos:

i) Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y consideremos $\mathbb{K}^n$ con su suma y producto usual. Entonces

$$B = \{(1, 0, \ldots, 0, 0), (0, 1, \ldots, 0, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$$

es base de $\mathbb{K}^n$, llamada la base canónica de $\mathbb{K}^n$.

ii) Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los reales y $\mathbb{R}[X]$ el espacio vectorial de los polinomios reales. Entonces B es base de $\mathbb{R}[X]$

$$B = \{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\}$$

iii) No se conoce ninguna base para el espacio vectorial de las sucesiones de números reales.

iv) No se conoce ninguna base de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

5.12. Teorema. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea B un subconjunto de V. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) B es una base de V.

(ii) B es un subconjunto maximal de vectores independientes de V.

(iii) B es un conjunto minimal de generadores de V.

Demo. ■

5.13. Teorema. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea S un conjunto de vectores independientes de V y G un sistema de generadores de V tales que $S \subset G$. Entonces existe una base B de V tal que $S \subset B \subset G$.

5.14. Para demostrar este teorema tenemos que hacer uso del Lema de Zorn. Por ello vamos a recordar algunas nociones:

Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Se dice que un subconjunto Y de X es una *cadena* si es un subconjunto totalmente ordenado de X. Se dice que un conjunto ordenado $(X, \leq)$ es *inductivo* si X es no vacío y toda cadena de X admite elemento maximal.

5.15. Lema de Zorn. Todo conjunto inductivo posee elementos maximales.

Nota: Aunque se le llame Lema de Zorn, realmente no es un lema, ya que no posee demostración, sino que es un axioma "hay matemáticos que se lo creen (muchos) y matemáticos que no se lo creen (pocos)". Si se ha demostrado que este axioma es equivalente al Lema de Zermelo, al axioma de elección o al hecho de que un producto infinito de conjuntos no vacíos es un conjunto no vacío.

Demo de 5.13. Consideremos Δ el conjunto de todos los subconjuntos linealmente independientes de X que contienen a S y están contenidos en G. Es decir:

$$\Delta = \{S' \subset X \mid S \subset S' \subset G \text{ y } S' \text{ es un conjunto de vectores independientes de } V\}$$

$\star$ Tenemos que Δ es claramente un conjunto ordenado por la inclusión. Es más, es no vacío ya que $S \in \Delta$

$\star$ Veamos que es un conjunto inductivo: Sean $\{S'_i\}_{i\in I}$ una cadena en Δ. Consideremos $S' = \cap_i S'_i$. Veamos que S' es un elemento maximal para la cadena: por reducción al absurdo, si S' fuera linealmente dependientes, existirían $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $\S'$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $\sum \lambda_i x_i = 0$ con algún $\lambda_i \neq 0$ pero al ser $\{S'_i\}_{i\in I}$ una cadena existe un i tal que $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S'_i$ lo que es una contradicción. Por tanto S' es un conjunto de vectores independientes, que contiene a S y está contenido en G, es decir, $S' \in \Delta$ es un mayorante para la cadena.

$\star$ Por el Lema de Zorn, sea B un elemento maximal en Δ. Veamos que B es una base para V. Por definición es un conjunto de vectores independientes. Por otro lado, supongamos que existe un elemento de $g \in G$ que no pertenece a $< B >$, entonces $S' \cup \{g\}$ sería un conjunto de elementos independientes, lo que nos lleva a contradicción con la maximalidad de S'. Por tanto $G \subset< B >$ y así, $V =< G >\subset< B >\subset V$, por lo que $V =< B >$ como queríamos demostrar. ■

5.16. Corolario. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces:

(i) Todo conjunto de vectores independientes se puede completar hasta obtener una base de V.

(ii) Todo conjunto de generadores de V contiene una base de V.

Nota: Después de este corolario, la Proposición 5.12. tiene una demostración mucho más fácil (trivial).

5.17. Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $B = \{e_i\}_{i\in I}$ una base de V. Entonces para cada $v \in V$ existe sólo una combinación lineal de elementos de B que da v.

Demo: Por la propia definición de base sabemos que cada vector de V se escribe como combinación lineal de elementos de B. Veamos que esta combinación lineal es única. Supongamos que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = \sum_{i\in I} \mu_i e_i,$$

Recordamos que sólo un número finito de escalares son no nulos. Entonces tenemos que $\sum_{i\in I}(\lambda_i - \mu_i)e_i = 0$ y al ser B una familia de vectores linealmente independientes, $\lambda_i = \mu_i$. ■

5.18. Def: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $B = \{e_i\}_{i\in I}$ una base de V. Supongamos que I es un conjunto totalmente ordenado. Se define las coordenadas de un vector v respecto de la base "ordenada" B como $(\lambda_i)_{i\in I}$ con $\lambda_i \in \mathbb{K}$ (casi todos nulos) tales que $v = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.

5.19. Ejemplos:

1-. Sea $\mathbb{R}^3$ y $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Entonces dado un vector $v = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ se tiene que sus coordenadas respecto de B son $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

2-. Sea $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$. Entonces las coordenadas del vector $(7,5,3)$ respecto de B' son $(3,2,2)$, ya que

$$(7,5,3) = 3(1,1,1) + 2(1,1,0) + 2(1,0,0)$$

Nota: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $B = \{e_i\}_{i\in I}$ una base de V. Si las coordenadas de un vector v respecto de B son $(\lambda_i)_{i\in I}$, por definición, el vector $v = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.

6. DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL.

En esta sección vamos a demostrar que el número de elementos de una base en un espacio vectorial V es un invariante del espacio vectorial.

6.1. TEOREMA DE STEINITZ 1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $B = \{e_i\}_{i\in I}$ una base y v un vector no nulo de V con coordenadas respecto de B, $(\lambda_i)_{i\in I}$. Entonces para cada $k \in I$ tal que $\lambda_k \neq 0$ se tiene que si cambiamos e_k por v obtenemos una nueva base de V, es decir:

$$\text{Si} \quad \lambda_k \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad B' = (B - \{e_k\}) \cup \{v\} \quad \text{es una nueva base de } V.$$

Demo. Vamos a empezar suponiendo que $k = 1$ en caso contrario reordenamos la base B y colocamos el vector e_k en primer lugar. Sabemos que $v = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$, por lo que, como ya sabemos, podemos despejar e_1:

$$e_1 = v - \sum_{i>1} \lambda_1^{-1}\lambda_i e_i$$

$\star$ Veamos que B' es un conjunto de vectores independientes, si

$$0 = \mu_1 v + \sum_{i>1} \mu_i e_i = \sum_{i\in I} \mu_1\lambda_i e_i + \sum_{i>1} \mu_i e_i = \mu_1\lambda_1 e_1 + \sum_{i>1}(\mu_1\lambda_i + \mu_i)e_i$$

Como B es una base de V, todos los coeficientes son cero. Así, $\mu_1\lambda_1 = 0$, y como$\lambda_1 \neq 0$, $\mu_1 = 0$ y entonces $\mu_1\lambda_i + \mu_i = 0$ implica $\mu_i = 0$ para todo $i \in I$. Es decir B' es un conjunto de vectores independientes de V.

$\star$ Veamos que B' es un sistema de generadores de V. Dado $w \in V$, como B es una base de V existen $\gamma_i \in \mathbb{K}$, casi todos nulos, tales que

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i\in I} \gamma_i e_i = \gamma_1 e_1 + \sum_{i>1} \gamma_i e_i = v - \sum_{i>1} \gamma_1\lambda_1^{-1}\lambda_i e_i + \sum_{i>1} \gamma_i e_i \\ &= v + \sum_{i>1}(\gamma_i - \gamma_1\lambda_1^{-1}\lambda_i)e_i \in < B' > \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el Teorema ■

6.2. TEOREMA DE STEINITZ 2. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, sea $B = \{e_i\}_{i\in I}$ una base y $X = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ un conjunto de vectores independientes de V. Entonces existen n elementos de B tales que si cambiamos estos elementos por X obtenemos una nueva base de V.

Demo. Vamos a hacer la demostración por inducción a n.

Si $n = 1$ tenemos que $W = \{w_1\}$ un vector independiente, y por tanto no nulo, ver (5.9.). Por lo que por el teorema anterior (alguna de las coordenadas de w_1 respecto de B será no nula) existe un $e_i \in B$ que al cambiarlo por w_1 nos da una nueva base.

Supongamos que el resultado es cierto para $n-1$. Si consideramos $X' = \{w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\}$, tenemos, otra vez por (5.9.) que es un conjunto de vectores independientes, por lo que por la hipótesis de inducción existen $n-1$ elementos de B que al cambiarlos por X nos da otra base de V, haciendo una reordenación en B supongamos que son los $n-1$ primeros. Por tanto

$$B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, e_n, e_{n+1}, \ldots\}$$

es base de V. Sea ahora w_n

Nota: tenemos que conseguir cambiarlo por un elemento de B' distinto de $w_1, \ldots, w_{n-1}$, por lo que no podemos aplicar simplemente el caso $n = 1$. Es más, no hemos usado que X es un conjunto de vectores independientes, sólo que son vectores no nulos (si no se usan todas las hipótesis es fácil que no este bien hecho).

Como B' es base de V, sean $(\lambda_i)_{i\in I}$ las coordenadas de w_n respecto de B'.

$$w_n = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_{n-1} w_{n-1} + \lambda_n e_n + \lambda_{n+1} e_{n+1} + \ldots$$

Observar, que como X es un conjunto de vectores independientes, no puede suceder que $\lambda_s = 0$ para todo $s \geq n$ (tendríamos $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_{n-1} w_{n-1} - w_n = 0$, una combinación lineal de elementos de X nula con escalares no nulos). Por tanto, existe $\lambda_r \neq 0$ con $r \geq n$ y por el Teorema de Steinitz 1 podemos cambiar w_n por este e_r, lo que completa el Teorema. ∎

6.3. TEOREMA. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces si una base de V tiene n elementos, todas las bases de V tienen n elementos.

Demo. Sea $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de V y B' otra base de V. Entonces B' es un conjunto de vectores independientes de V, por lo que si tuviera más de n elementos podríamos cambiar estos elementos por elementos de B, lo cual es absurdo. Por tanto $\#B' \leq \#B$. Como ahora B' también es finita, aplicando el mismo resultado $\#B \leq \#B'$. Por lo que $\#B' = \#B$. ■

Este mismo teorema es cierto para bases con cualquier cardinal, aunque las técnicas son distintas y no vamos a demostrarlo.

6.4. TEOREMA. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces si una base de V tiene cardinal $\mathcal{X}$, todas las bases de V tienen cardinal $\mathcal{X}$.

6.5. DEF: Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se define la *dimensión* de V y se representa por $\dim_{\mathbb{K}} V$ como el cardinal de cualquier base de V.

6.6. EJEMPLOS:

1-. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $(\mathbb{K}^n, +, \ )$ con su estructura usual de $\mathbb{K}$ espacio vectorial. tenemos entonces que una base de $\mathbb{K}^n$, la base canónica, es

$$B = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$$

por tanto $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$.

2-. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y consideremos V el espacio vectorial de las matrices de tamaño $n \times m$ sobre $\mathbb{K}$. Entonces $\dim_{\mathbb{K}}(V) = nm$.

3-. Sea $V = \mathbb{K}_n[X]$ el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a n. Entonces $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n$. Una base $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$.

4-. Hay que tener cuidado, ya que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ pero $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. Es decir, $\mathbb{C}$ considerado como $\mathbb{C}$ espacio vectorial tiene dimensión 1, mientras que $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ tiene dimensión 2.

5-. $V = \mathbb{K}[X]$ el espacio vectorial de los polinomios reales tiene dimensión numerable, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X]) = \aleph_0$

6-. $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre los racionales $\mathbb{Q}$ tiene dimensión $\aleph_1$, es decir, tiene cardinal no numerable.

Nota: Aunque no se conoce ninguna base de $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, si se conoce su dimensión, $\aleph_1$.

7-. El espacio vectorial de todas las sucesiones de números reales también tiene dimensión $\aleph_1$.

6.7. PROPOSICIÓN. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $W \leq V$. Supongamos que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$. Entonces $\dim_{\mathbb{K}}(W) \leq n$ y se da la igualdad si y sólo si $V = W$.

7. ECUACIONES DE UN SUBESPACIO.

7.1. Sea V el espacio vectorial $(\mathbb{K}^n, +, \ )$ con su suma y producto usual y sea W un subespacio de W. Sabemos que W tiene una base con menos de n elementos, por tanto tiene sistemas de generadores un número finito de elementos. Sea $G = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ un sistema de generadores de W.

$$w_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), w_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, w_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$$

$\star$ Se definen las *ecuaciones vectoriales* para W como la expresión:

$$\begin{aligned}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \lambda_1(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) + \lambda_2(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) + \dots + \\ + \dots + \lambda_k(a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})\end{aligned}$$

Nota: Todo vector de W se pone como combinación lineal de elementos de G, por lo que $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ representa cualquier vector de W cuando $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ se van sustituyendo por valores de $\mathbb{K}$.

$\star$ Se definen las *ecuaciones paramétricas* para W como la expresión:

$$\begin{aligned}X_1 &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_k a_{k1} \\ X_2 &= \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_k a_{k2} \\ &\vdots \\ X_n &= \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_k a_{kn}\end{aligned}$$

$\star$ Si en las expresión anterior vamos despejando los parámetros y sustituyéndolos en las demás expresiones, es decir, vamos "deshaciéndonos" de los parámetros, nos encontramos con las *ecuaciones continuas* para W.

$\star$ Una expresión "bonita" de la anterior se la denomina *ecuaciones cartesianas* de W.

Nota: Como claramente no ha quedado claro, veamos un ejemplo:

$\diamondsuit$ Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los reales y consideremos W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\{(1,2,3),(1,1,0),(0,1,3)\}$. Entonces:

$\star$ Ecuaciones vectoriales:

$$(x,y,z) = \lambda(1,2,3) + \mu(1,1,0) + \gamma(0,1,3)$$

$\star$ Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= \lambda + \mu \\ y &= 2\lambda + \mu + \gamma \\ z &= 3\lambda + \quad +3\gamma \end{aligned}$$

$\star$ Ecuaciones continuas: Despejamos λ de la primera ecuación $\lambda = x - \mu$ y sustituimos en las demás ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= 2x - \mu + \gamma \\ z &= 3x - 3\mu + 3\gamma \end{aligned}$$

despejamos μ en la primera ecuación, $\mu = 2x + \gamma - y$ y sustituimos en la última ecuación

$$z = 3x + 3y - 6x - 3\gamma + 3\gamma$$

en este punto, o antes, deben de desaparecer los parámetros, por lo que

$$z = -3x + 3y \qquad \text{Ecuación continua.}$$

$\star$ Si lo trasladamos todo a un lado se le denomina ecuaciones cartesianas

$$3x - 3y + z = 0$$

Nota: En la primera ecuación (x,y,z) recorría todos los vectores de W, por lo que en la última ecuación lo que obtenemos es la relación existente entre x,y,z para que el vector $(x,y,z) \in W$. Así,

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 3y + z = 0\}$$

$\diamondsuit$ Sea $(\mathbb{R}^4, +, \ )$ con la suma y producto usuales y sea U el subespacio de V generado por $\{(4,0,6,2),(6,0,9,3)\}$.

$\star$ Ecuaciones vectoriales de U

$$(x, y, z, t) = \lambda(4, 0, 6, 2) + \mu(6, 0, 9, 3)$$

$\star$ Ecuaciones paramétricas de U:

$$\begin{aligned} x &= 4\lambda + 6\mu \\ y &= 0 \\ z &= 6\lambda + 9\mu \\ t &= 2\lambda + 3\mu \end{aligned}$$

$\star$ Ecuaciones continuas de U: despejamos λ de la primera ecuación y sustituimos en las demás, $\lambda = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}\mu$

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ z &= \frac{3}{2}x - \frac{18}{2}\mu + 9\mu = \frac{3}{2}x \\ t &= \frac{1}{2}x - \frac{6}{2}\mu + 3\mu = \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Se han ido ya todos los parámetros, por lo que éstas son las ecuaciones continuas.

$\star$ Ecuaciones cartesianas: $y = 0;\ 3x - 2z = 0;\ x - 2t = 0$.

Por tanto $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0;\ 3x - 2z = 0;\ x - 2t = 0\}$. En este caso, U queda definido por un sistema de tres ecuaciones lineales.

BIBLIOGRAFÍA

[1] **F. M. Hall:** "An introduction to Abstract Algebra", *Cambridge University Press*, 1980.

[2] **M. Spivak:** "Calculus, Cálculo Infinitesimal", *Editorial Reverte, S. A.*, 1992.

[3] **P. Alberca, D. Martín:** "Métodos Matemáticos", *Ediciones Aljibe*, 2001.

Tema 3.

1. INTRODUCCIÓN

En este tema vamos a estudiar aplicaciones entre espacios vectoriales. Resultados relevantes y que han de saberse son:

⋆ La forma de "fabricar" aplicaciones lineales, y el hecho básico de que una aplicación lineal queda determinada una vez que se conoce la imagen de una base.

⋆ Cálculo de la matriz asociada a un cambio de base y como ésta es una matriz inversible. Es importante el hecho de que esta matriz transforma las coordenadas de un vector respecto de la primera base en coordenadas de ese mismo vector respecto de la segunda base.

⋆ Calculo de la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de dos bases. Es importante el hecho de que esta matriz transforma las coordenadas de un vector respecto de la primera base en las coordenadas de la imagen de este vector respecto de la segunda base.

⋆ La relación existente entre dos matrices asociadas a una misma aplicación lineal entre distintas bases.

⋆ Calcular el rango de una aplicación lineal y de una matriz.

⋆ Comprender la estructura del espacio vectorial producto directo, suma directa, espacio vectorial cociente y espacio vectorial dual, así como sus propiedades fundamentales.

2. APLICACIONES LINEALES

2.1. Def: Sean U y V dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : U \to V$ una aplicación. Se dice que f es una **aplicación lineal** si verifica:

(1) $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$ para todo $u_1, u_2 \in U$.

(2) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $u \in U$.

2.2. Ejemplos:

⋆ Sean U y V dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces la aplicación constante a cero es una aplicación lineal: sea $f : U \to V$ tal que $f(u) = \overline{0}$

para todo $u \in U$. Entonces

$$\begin{aligned} f(u_1) + f(u_2) &= \overline{0} + \overline{0} = \overline{0} = f(u_1 + u_2) \\ \lambda f(u) &= \lambda \overline{0} = \overline{0} = f(\lambda u). \end{aligned}$$

$\star$ Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, 2x + y - z)$.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) + f(a, b, c) &= (x + y, 2x + y - z) + (a + b, 2a + b - c) \\ &= (x + y + a + b, 2x + y - z + 2a + b - c); \\ f((x, y, z) + (a, b, c)) &= f(x + a, y + b, z + c) \\ &= (x + a + y + b, 2(x + a) + y + b - z - c). \end{aligned}$$

Luego $f(x, y, z) + f(a, b, c) = f((x, y, z) + (a, b, c))$, y

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z)) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x + \lambda y - \lambda z); \\ \lambda f(x, y, z) &= \lambda(x + y, 2x + y - z) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x + \lambda y - \lambda z). \end{aligned}$$

Luego $f(\lambda(x, y, z)) = \lambda f(x, y, z)$, lo que implica que f es una aplicación lineal.

$\star$ Sean $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$ espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Consideremos $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces la aplicación $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

es una aplicación lineal. Es claro, ya que por las propiedades del producto de matrices tenemos que:

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ &= A \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

y

$$f(\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = A \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Luego es una aplicación lineal.

2.3. PROPOSICIÓN. Sean U y V dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : U \to V$ una aplicación lineal. Entonces:

(i) $f(\overline{0}) = \overline{0}$.

(ii) $f(-u) = -f(u)$.

(iii) $f(u_1 - u_2) = f(u_1) - f(u_2)$

(iv) $f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \ldots + \lambda_n f(u_n)$

Demo: (i). $f(\overline{0}) = f(0.\overline{0}) = 0.f(\overline{0}) = \overline{0}$.

Las demás propiedades se siguen de la definición. ∎

2.4. DEF: Sean U y V dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : U \to V$ una aplicación lineal. Entonces:

- ⋆ Si f es inyectiva se dice que f es un **monomorfismo** de espacios vectoriales.
- ⋆ Si f es sobreyectiva se dice que f es un **epimorfismo** de espacios vectoriales.
- ⋆ Si f es biyectiva se dice que f es un **isomorfismo** de espacios vectoriales.
- ⋆ A una aplicación lineal $f : V \to V$ se la denomina un **endomorfismo** (es decir, si tiene el mismo dominio que co-dominio).
- ⋆ Un endomorfismo biyectivo se le denomina un **automorfismo**.

2.5. Diremos que dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ son **isomorfos** si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $f : V \to W$.

Nota: Observar que entonces V y W son el "mismo" espacio vectorial, la única diferencia entre ellos es el nombre de sus elementos.

3. NÚCLEO E IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL.

Asociada a una aplicación lineal $f : U \to V$ nos vamos a encontrar varios subespacios interesantes:

3.1. PROPOSICIÓN. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Sea X un subconjunto de V. Entonces

$$f(< X >) =< f(X) >,$$

en donde <—> denota el subespacio generado por "—".

Demo. Sea $v \in< X >$, tenemos entonces que existen $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$, por lo que

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \in< f(X) > \end{aligned}$$

Luego $f(< X >) \subset< f(X) >$. Por otro lado, si $f(v) \in< f(X) >$ existen $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \\ &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) = f(< X >) \end{aligned}$$

Por lo que $< f(X) >\subset f(< X >)$, y tenemos la igualdad. ■

3.2. PROPOSICIÓN. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Sea U un subespacio de V, entonces $f(U)$ es un subespacio de W.

3.3. DEF: Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Se define la **imagen** de f y se representa por $Im(f)$ como $f(V)$.

Nota: Observar que la imagen de una aplicación lineal es un subespacio del codominio de f, en este caso W.

3.4. PROPOSICIÓN. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Sea U un subespacio de W, entonces

$$f^{-1}(U) = \{v \in V \ \mid f(v) \in U\}$$

es un subespacio de V.

Demo: dados $u_1, u_2 \in f^{-1}(U)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que

$$\begin{array}{rcc} u_1 + u_2 \in f^{-1}(U) & \text{ya que} & f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) \in U \\ \lambda u_1 \in f^{-1}(U) & \text{ya que} & f(\lambda u_1) = \lambda f(u_1) \in U \end{array} \quad ■$$

3.5. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Se define el **núcleo** de f y se representa por $Ker(f)$ como:

$$Ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\} = f^{-1}(0)$$

Nota: por la proposición anterior, el núcleo de una aplicación lineal es un subespacio de V.

3.6. EJEMPLO: Consideremos la aplicación lineal del ejemplo 2.2., es decir, sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, 2x + y - z)$. Entonces

$$Ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; | f(x, y, z) = (0, 0)\}$$

Por lo que nos aparecen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

si las resolvemos: $x = -y$ y $z = 2x + y = -2y + y = -y$. Así,

$$Ker(f) = \{(\lambda, -\lambda, -\lambda) \; |\lambda \in \mathbb{R}\} \qquad \text{y una base} \qquad \{(1, -1, -1))\}$$

3.7. PROPOSICIÓN. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, V y W dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces:

(i) f es inyectiva (es decir, un monomorfismo) si y sólo si $Ker(f) = 0$.

(ii) f es sobreyectiva (es decir, un epimorfismo) si y sólo si $Im(f) = W$.

Demo: (i). Supongamos que f es un monomorfismo (inyectiva). Dado $v \in Ker(f)$, tenemos, por definición de $Ker(f)$, que $f(v) = 0$. Pero también sabemos que $f(0) = 0$, por lo que $f(0) = 0 = f(v)$ lo que implica, al ser f inyectiva, que $v = 0$. Hemos demostrado que el único vector de V que está en el núcleo de f es el vector cero, es decir, $Ker(f) = 0$.

Supongamos ahora que $Ker(f) = 0$ y sean v_1, $v_2 \in V$ tales que $f(v_1) = f(v_2)$. Tenemos entonces que $0 = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$, por lo que $v_1 - v_2 \in Ker(f) = 0$ y por tanto $v_1 = v_2$.

(ii). Es evidente. ■

4. COMO “FABRICAR” APLICACIONES LINEALES

4.1. Teorema. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ un conjunto de vectores de W. Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \to W$ tal que: $f(v_i) = w_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demo: Supongamos que existe una aplicación lineal que verifica que $f(v_i) = w_i$. Tenemos entonces que dado un vector $v \in V$, v se puede escribir como una única combinación lineal de elementos de B_V, por lo que existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$, así,

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_n f(v_n)$$

y por tanto sólo hay una forma de definir f, luego, de haber una aplicación lineal que verifique esto, ésta es única.

Definamos entonces la aplicación lineal así: dado $v \in V$,

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

de forma única, y por tanto podemos definir

$$f(v) := \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_n f(v_n).$$

Ahora sólo tenemos que demostrar que esta f así definida es una aplicación lineal.

Dados $v, v' \in U$ y $\gamma \in F$, existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \\ u' &= \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} v + v' &= (\lambda_1 + \mu) v_1 + (\lambda_2 + \mu_2) v_2 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) v_n \\ \gamma v &= (\gamma \lambda_1) v_1 + (\gamma \lambda_2) v_2 + \ldots + (\gamma \lambda_n) v_n \end{aligned}$$

Si aplicamos ahora nuestra definición de f:

$$\begin{aligned} f(v + v') &= f(\lambda_1 + \mu) v_1 + (\lambda_2 + \mu_2) v_2 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) v_n \\ &= (\lambda_1 + \mu) f(v_1) + (\lambda_2 + \mu_2) f(v_2) + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) f(v_n) \\ &= \lambda_1 f(v v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n) + \mu_1 f(v_1) + \ldots + \mu_n f(v_n) \\ &= f(v) + f(v') \\ f(\gamma v) &= (\gamma \lambda_1) f(v_1) + (\gamma \lambda_2) f(v_2) + \ldots + (\gamma \lambda_n) f(v_n) = \gamma f(v). \end{aligned}$$

Por lo que queda demostrado el Teorema. ■

Nota: Si el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ no es una base no podemos afirmar que exista o que no exista una aplicación lineal que verifique el teorema anterior.

4.2. COROLARIO. Una aplicación lineal queda determinada una vez que se conoce la imagen de una base.

4.3. EJEMPLO. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Consideremos los siguientes conjuntos $B := \{(1,2,3),(1,0,2),(0,0,4)\} \subset \mathbb{K}^3$ y $\{(2,2),(4,4),(8,8)\} \subset \mathbb{K}^2$. Determinar si existe una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ tal que $f(1,2,3) = (2,2)$, $f(1,0,2) = (4,4)$ y $f(0,0,4) = (8,8)$.

En primer lugar se comprueba que B es una base: es fácil ver que es un conjunto de vectores independientes, por lo que tres vectores independientes en $\mathbb{R}^3$ son base.

En segundo lugar se escribe cualquier vector de $\mathbb{K}^3$ como combinación lineal de elementos de B.

$$(x,y,z) = \lambda(1,2,3) + \mu(1,0,2) + \gamma(0,0,4)$$

de donde:

$$\begin{aligned} \lambda =& \frac{y}{2} \\ \mu =& x - \frac{y}{2} \\ \gamma =& \frac{z}{4} - \frac{y}{8} - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Tercer paso:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) =& f(\frac{y}{2}(1,2,3) + (x - \frac{y}{2})(1,0,2) + (\frac{z}{4} - \frac{y}{8} - \frac{x}{2})(0,0,4)) \\ =& \frac{y}{2}(2,2) + (x - \frac{y}{2})(4,4) + (\frac{z}{4} - \frac{y}{8} - \frac{x}{2})(8,8) \\ =& (2z - 2y, 2z - 2y). \end{aligned}$$

4.4. TEOREMA. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) f es inyectiva.

(ii) $Ker(f) = \{0\}$.

(iii) Si S es un conjunto de vectores independientes de V, $f(S)$ es un conjunto de vectores independientes de W.

(iv) Si B es una base de V, $f(B)$ es un conjunto de vectores independientes de W.

(v) Existe una aplicación lineal $g : W \to V$ tal que $g \circ f = Id_V$.

4.5. Teorema. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) f es sobreyectiva.

(ii) $Im(f) = W$.

(iii) Si S es un sistema de generadores de V, $f(S)$ es un sistema de generadores de W.

(iv) Si B es una base de V, $f(B)$ es un sistema de generadores de W.

(v) Existe una aplicación lineal $g : W \to V$ tal que $f \circ g = Id_W$.

4.6. Teorema. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) f es biyectiva.

(ii) $Ker(f) = \{0\}$ y $Im(f) = W$.

(iii) Si B es una base de V, $f(B)$ es una base de W.

(iv) Existe una aplicación lineal $g : W \to V$ tal que $f \circ g = Id_W$ y $g \circ f = Id_V$.

5. MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL.

En esta sección vamos a ver que hay una relación muy estrecha entre las aplicaciones lineales y las matrices.

5.1. Teorema. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces la aplicación que a cada vector de V lo manda a sus coordenadas respecto de la base B es un isomorfismo de espacios vectoriales, es decir:

$$f_B : V \to \mathbb{K}^n \quad \text{definida por} \quad f(v) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

en donde $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ son las coordenadas del vector v respecto de B (es decir, $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$) es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demo: La demostración es similar a la dada en (4.1.). Es más, f_B es la única aplicación lineal tal que $f_B(v_i) = e_i$, con e_i el término i-esimo de la base canónica de $\mathbb{K}^n$. ■

5.2. Matriz asociada a un cambio de base. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean B y B' dos bases de V. Nos va a interesar ver la relación existente entre las coordenadas de un vector v respecto de la base B y las coordenadas de v respecto de la base B'.

Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ las bases anteriores. Supongamos que:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n,$$

entonces las coordenadas de v respecto de B son $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$,

y que

$$v = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_n u_n,$$

entonces las coordenadas de v respecto de B' son $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$. Veamos la relación existente entre $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ y $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$.

Escribamos cada elemento de la base de B como combinación lineal de B'.

$$\begin{aligned}
v_1 =& \lambda_{11} u_1 + \lambda_{12} u_2 + \ldots + \lambda_{1n} u_n \\
v_2 =& \lambda_{21} u_1 + \lambda_{22} u_2 + \ldots + \lambda_{2n} u_n \\
&\vdots \\
v_n =& \lambda_{n1} u_1 + \lambda_{n2} u_2 + \ldots + \lambda_{nn} u_n
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
v =& \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \\
=& \lambda_1(\lambda_{11} u_1 + \lambda_{12} u_2 + \ldots + \lambda_{1n} u_n) + \\
&+ \lambda_2(\lambda_{21} u_1 + \lambda_{22} u_2 + \ldots + \lambda_{2n} u_n) + \\
&\vdots \\
&+ \lambda_n(\lambda_{n1} u_1 + \lambda_{n2} u_2 + \ldots + \lambda_{nn} u_n)
\end{aligned}$$

Luego si lo escribimos como combinación lineal de elementos de B' tenemos que

$$\begin{aligned} v = &(\lambda_1\lambda_{11} + \lambda_2\lambda_{21} + \ldots + \lambda_n\lambda_{n1})u_1 \\ &+(\lambda_1\lambda_{12} + \lambda_2\lambda_{22} + \ldots + \lambda_n\lambda_{n2})u_2 \\ &\vdots \\ &=(\lambda_1\lambda_{1n} + \lambda_2\lambda_{2n} + \ldots + \lambda_n\lambda_{nn})u_n \end{aligned}$$

Esto tiene una representación en forma de matriz muy sencilla.

5.2.1 DEF: Definimos $C_{B'B}$ la matriz de cambio de base de la base B a la base B' como:

$$C_{B'B} := \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \ldots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & \ldots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

Nota: Observar que las columnas de la matriz $C_{B'B}$ son las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base B' y que:

$$C_{B'B}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

Nota: Es decir, la matriz $C_{B'B}$ transforma las coordenadas de un vector v respecto de la base B en las coordenadas del mismo vector v respecto de la base B'.

Nota: Si calculamos $C_{B'B}$ y $C_{BB'}$ tenemos que:

$$C_{B'B}C_{BB'}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C_{BB'}C_{B'B}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

con lo que las matrices $C_{B'B}$ y $C_{BB'}$ son inversibles, con inversas la una de la otra.

5.2.2 EJEMPLO. Consideremos en $\mathbb{R}^3$, $B = \{(1,3,5),(0,0,1),(1,1,0)\}$ y $B' = \{(1,1,1),(1,2,3),(1,0,1)\}$, dos bases. Calcula la matriz de cambio de base de B a B' y la de B' a B. Primero se calculan las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base B' (se plantean los sistemas de ecuaciones y se resuelven).

$$(1,3,5) = (-1)(1,1,1) + 2(1,2,3) + 0(1,0,1)$$
$$(0,0,1) = (-1)(1,1,1) + \frac{1}{2}(1,2,3) + \frac{1}{2}(1,0,1)$$
$$(1,1,0) = 2(1,1,1) + (-\frac{1}{2})(1,2,3) + (-\frac{1}{2})(1,0,1)$$

Por tanto: $C_{B'B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Calculemos el otro cambio de base: calculamos las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B.

$$(1,1,1) = 0(1,3,5) + 1(0,0,1) + 1(1,1,0)$$
$$(1,2,3) = \frac{1}{2}(1,3,5) + \frac{1}{2}(0,0,1) + \frac{1}{2}(1,1,0)$$
$$(1,0,1) = (-\frac{1}{2})(1,3,5) + \frac{7}{2}(0,0,1) + \frac{3}{2}(1,1,0)$$

Por tanto: $C_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Nota: Observar que son matrices una inversa de la otra.

$$C_{B'B}C_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{BB'}C_{B'B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3. Matriz asociada a una aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$ respecto de las bases canónicas. Consideremos $\mathbb{K}$ un cuerpo y $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ una aplicación lineal. Veamos que f puede verse como una matriz de tamaño m por n, que llamaremos la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas y que denotaremos por $A^f \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Es más, A^f no es más que las coordenadas de las imágenes de cada vector de la base canónica de R^n en columnas, es decir, si

$$\begin{aligned}
f(1,0,\dots,0) &= (\lambda_{11},\lambda_{12},\dots,\lambda_{1m})\\
f(0,1,\dots,0) &= (\lambda_{21},\lambda_{22},\dots,\lambda_{2m})\\
\vdots\qquad & \qquad \vdots\\
f(0,0,\dots,1) &= (\lambda_{n1},\lambda_{n2},\dots,\lambda_{nm})
\end{aligned}$$

Entonces:

$$A^f = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \dots & \lambda_{n1}\\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_{1m} & \lambda_{2m} & \dots & \lambda_{nm}\end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = A^f \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

5.3.1 Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $f(x,y) = (2x+3y, x-y, 4x-y)$. Entonces la matriz asociada a f respecto de la base canónica es:

$$\begin{aligned} f(1,0) &= (2,1,4)\\ f(0,1) &= (3,-1,-1)\end{aligned} \quad \text{y} \quad A^f = \begin{pmatrix} 2 & 3\\ 1 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$$

Nota: $\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 1 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = (2x+3y, x-y, 4x-y)$, por lo que si que hemos conseguido dar a f una "forma matricial".

5.4. Matriz asociada a aplicaciones lineales generales. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal.

Sean $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V y $B' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ base de W y consideremos los isomorfismos:

$$f_B : V \to \mathbb{K}^n$$

que asocia a cada vector de V sus coordenadas respecto de la base B y,

$$f_{B'} : W \to \mathbb{K}^m$$

que asocia a cada vector de W sus coordenadas respecto de la base B'.

Por tanto tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_B"'] & W \arrow[d, "f_{B'}"] \\ K^n \arrow[r, "f_{B'} \circ f \circ f^{-1}_B"'] & K^n \end{tikzcd}$$

Y la aplicación lineal

$$f_{B'} \circ f \circ f_B^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m.$$

5.4.1 DEF: Se define la matriz asociada a f respecto de las bass B y B' y se representa por $A^f_{B'B}$ como la matriz asociada a la aplicación lineal $f_{B'} \circ f \circ f_B^{-1}$.

Nota Importante: Por construcción la matriz asociada a f respecto de las bases B y B', es decir, $A^f_{B'B}$, transforma las coordenadas de un vector $v \in V$ respecto de la base B en las coordenadas de $f(v)$ en la base B'.

5.4.2 ALGORITMO: para calcular la matriz asociada a f respecto de las bases B y B'.

Se calculan las imágenes por f de los elementos de la base de B y se escriben como combinación lineal de elementos de B' (es decir, se calculan sus coordenadas respecto de B'). Es decir:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_{11} w_1 + \lambda_{12} w_2 + \ldots + \lambda_{1m} w_m \\ f(v_2) &= \lambda_{21} w_1 + \lambda_{22} w_2 + \ldots + \lambda_{2m} w_m \\ &\vdots \\ f(v_n) &= \lambda_{n1} w_1 + \lambda_{n2} w_2 + \ldots + \lambda_{nm} w_m \end{aligned}$$

Entonces estas coordenadas puestas en columnas nos dan la matriz que buscamos:

$$A^f_{B'B} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \dots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{1m} & \lambda_{2m} & \dots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

5.4.3 EJEMPLO: Se considera la aplicación lineal $f; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x,y,z) = (2x+3y, 3y+4z, 4z+5x, x+y+z)$$

Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases

$$\begin{aligned} B &= \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3 \\ B' &= \{((1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,0),(0,0,1,1)\} \subset \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

Sea calcula:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (5,7,9,3) = 5(1,0,0,0) + 7(0,1,1,0) + 2(0,0,1,0) + 3(0,0,0,1) \\ f(1,1,0) &= (5,3,5,2) = 5(1,0,0,0) + 3(0,1,1,0) + 2(0,0,1,0) + 2(0,0,0,1) \\ f(1,0,0) &= (2,0,5,1) = 2(1,0,0,0) + 0(0,1,1,0) + 5(0,0,1,0) + 1(0,0,0,1) \end{aligned}$$

Luego la matriz asociada a f respecto de las bases B y B' es:

$$A^f_{B'B} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Si tomamos el vector $(3,2,1) \in \mathbb{R}^3$ tenemos que sus coordenadas respecto de la base B son:

$$(3,2,1) = 1(1,1,1) + 1(1,1,0) + 1(1,0,0).$$

Tenemos que las coordenadas de $f(3,2,1) = (12,10,19,6)$ respecto de la base B' son:

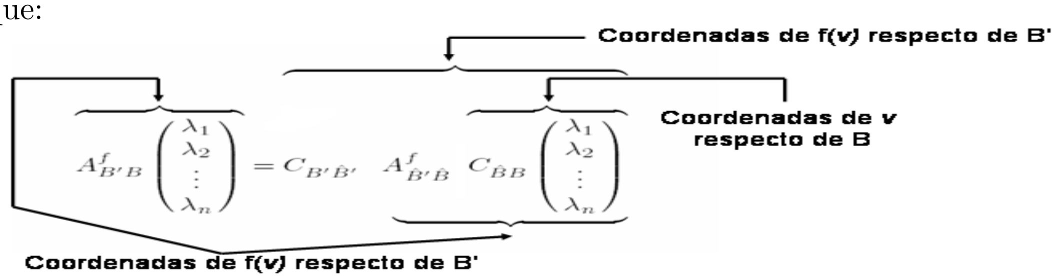
$$f(3,2,1) = 12(1,0,0,0) + 10(0,1,1,0) + 9(0,0,1,0) + 6(0,0,0,1).$$

Por tanto se tiene que:

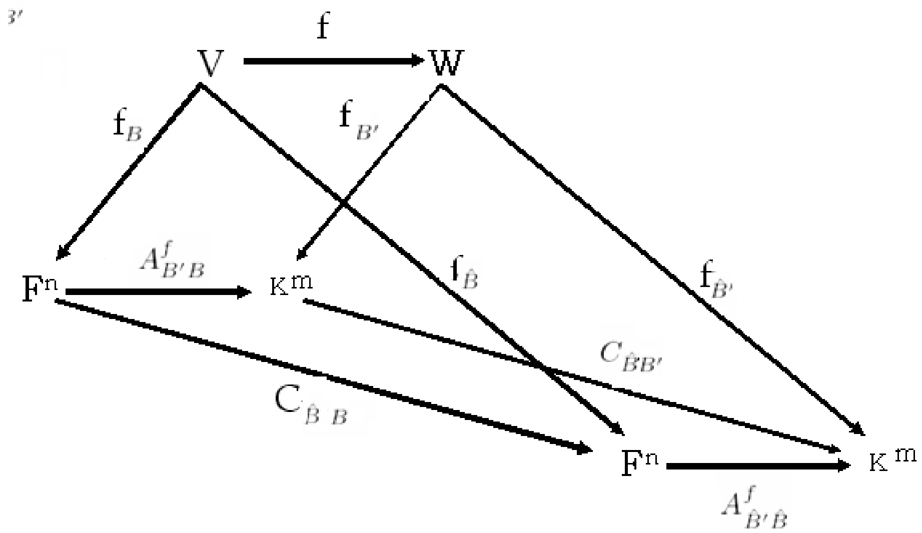
$$A^f_{B'B}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5&2\\7&3&0\\2&2&5\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\10\\9\\6\end{pmatrix}$$

Para terminar la sección vamos a estudiar que relación existe entre las matrices asociadas a una misma aplicación lineal cuando cambiamos de base.

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Sean B y $\hat{B}$ dos bases de V y B' y $\hat{B}'$ dos bases de W. Tenemos entonces $A^f_{B'B}$, la matriz asociada a f respecto de las bases B y B', y $A^f_{\hat{B}'\hat{B}}$, la matriz asociada a f respecto de las bases $\hat{B}$ y $\hat{B}'$. Nos preguntamos que relación existe entre estas matrices. La respuesta es fácil: $A^f_{B'B} = C_{B'\hat{B}'}A^f_{\hat{B}'\hat{B}}C_{\hat{B}B}$, ya que:



Todas las relaciones existentes entre las distintas aplicaciones quedan reflejadas en el siguiente diagrama conmutativo:



Nota: Recordamos que la matriz $C_{\hat{B}B}$ es inversa de la matriz $C_{B\hat{B}}$.

6. NUEVOS ESPACIOS VECTORIALES

6.1. Producto directo de espacios vectoriales Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\Pi_{i\in I}V_i$ el producto cartesiano (de estos conjuntos). Entonces las siguientes operaciones (operaciones por componentes) dan estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ a $\Pi_{i\in I}V_i$, llamado el producto directo de los espacios vectoriales V_i.

⋆ Dados $(v_i)_{i\in I}$, $(w_i)_{i\in I}$ definimos la suma como

$$(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} := (v_i + w_i)_{i\in I}$$

⋆ Dados $(v_i)_{i\in I}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ definimos la multiplicación por escalares como:

$$\lambda (v_i)_{i\in I} := (\lambda v_i)_{i\in I}$$

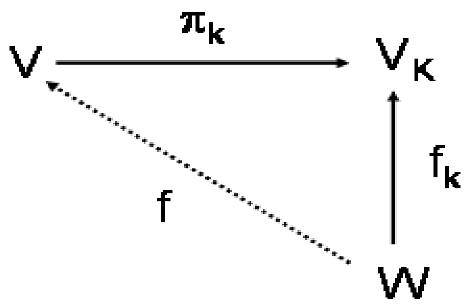
6.1.1 Proposición. Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces $\Pi_{i\in I}V_i$, con las operaciones anteriores, tiene estructura de $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

6.1.2 Def: Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $V = \Pi_{i\in I}V_i$ el producto directo de los espacios vectoriales V_i. Se define la proyección "canónica" de V en V_k, con $k \in I$, como:

$$\begin{array}{rccc} \pi_k : & V & \rightarrow & V_k \\ & (v_i)_{i\in I} & \mapsto & v_k. \end{array}$$

Es fácil ver que para cada $k \in I$, π_k es un epimorfismo de espacios vectoriales.

6.1.3 Propiedad fundamental del producto cartesiano de espacios vectoriales. Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $V = \Pi_{i\in I}V_i$ el producto directo de los espacios vectoriales V_i. Entonces para cada espacio vectorial W y cada familia de aplicaciones lineales $f_i : W \rightarrow V_i$ existe una única aplicación lineal $f : W \rightarrow V$ tal que para cada $k \in I$ el siguiente diagrama es conmutativo:



Es más, Si $\hat{V}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ Y $\rho_i : \hat{V} \to V_i$ son una familia de epimorfismos de espacios vectoriales tales que para cada espacio vectorial W y cada familia de aplicaciones lineales $f_i : W \to V_i$ existe una única aplicación lineal $f : W \to \hat{V}$ tal que para cada $k \in I$ el diagrama anterior es conmutativo, entonces V es isomorfo a $\Pi_{i\in I} V_i$.

Demo: Vamos a suponer en principio que existe esta aplicación lineal y vamos a demostrar que entonces sólo se puede definir de una única manera, por lo que demostraremos que, caso de existir, es única. Luego veremos que la única posible verifica lo que queremos.

1-. Supongamos que existe $f : W \to \Pi_{i\in I} V_i$ tales que $\pi_k \circ f = f_k$ tenemos entonces que dado $w \in W$, $f_k(w) = \pi_k(f(w))$, por lo que la coordenada k-esima de $f(w)$ es $f_k(w)$. Así, $f(w) = (f_i(w))_{i\in I}$.

2-. Comprobemos entonces que la aplicación $f : W \to \Pi_{i\in I} V_i$ definido por $f(w) = (f_i(w))_{i\in I}$ es una aplicación lineal que verifica el enunciado:

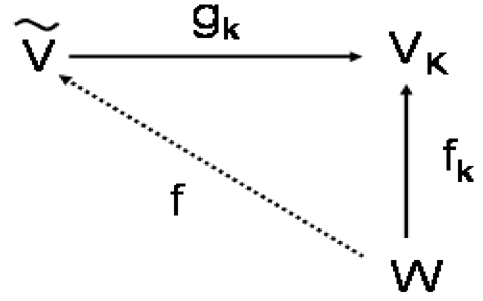
⋆ ¿Es lineal?

$$\begin{aligned} f(\lambda w_1 + w_2) &= (f_i(\lambda w_1 + w_2))_{i\in I} = (\lambda f_i(w_1) + f_i(w_2))_{i\in I} \\ &= \lambda (f_i(w_1))_{i\in I} + (f_i(w_2))_{i\in I} = \lambda f(w_1) + f(w_2) \end{aligned}$$

⋆ ¿Hace conmutativo los diagramas? Pues claro

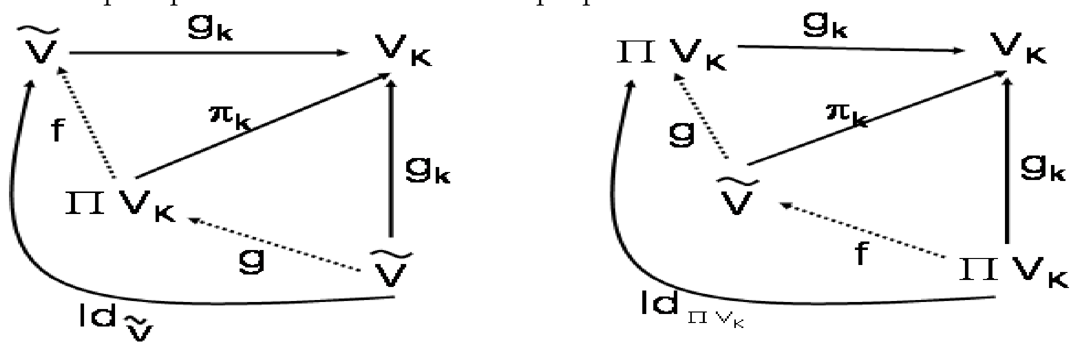
$$\pi_k \circ f(w) = \pi_k((f_i(w))_{i\in I}))f_k(w).$$

Veamos ahora que todo espacio vectorial con estas propiedades es isomorfo al producto cartesiano de los $\{V_i\}_{i\in I}$. Sea $\hat{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $g_i : \hat{V} \to V_i$ son una familia de epimorfismos de espacios vectoriales tales que para cada espacio vectorial W y cada familia de aplicaciones lineales $f_i : W \to V_i$ existe una única aplicación lineal $f : W \to \hat{V}$ tal que para cada $k \in I$ el diagrama



es conmutativo.

Si consideramos ahora $W = \Pi_{i\in I}V_i$ y $f_i = \Pi_i$ las proyecciones canónicas tenemos que aplicando varias veces esta propiedad fundamental tenemos:



En donde $f \circ g = Id_{\hat{V}}$ y $g \circ f = Id_{\Pi V_i}$ lo que demuestra que tanto f como g son isomorfismos, y por tanto $\hat{V}$ y $\Pi_{i\in I}V_i$ son espacios vectoriales isomorfos.

6.2. Suma directa externa de espacios vectoriales Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\bigoplus_{i\in I} V_i$ el subconjunto de $\Pi_{i\in I}V_i$ de todos los vectores con solo un número finito de entradas no nulas, es decir

$$\bigoplus_{i\in I} V_i = \{(v_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I}V_i \mid v_i = 0 \quad \text{para casi todo } i\}$$

6.2.1 Proposición. Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces $\bigoplus_{i\in I} V_i$ es un subespacio vectorial de $\Pi_{i\in I}V_i$, llamado la suma directa externa de los espacios vectoriales V_i.

Demo: Es claro que si sumo dos vectores con un número finito de coordenadas no nulas, me da un vector con un número finito de coordenadas no nulas, y que si multiplico un vector con un número finito de coordenadas no nulas por un escalar, obtengo un vector con el mismo número de coordenadas no nulas. Es decir, $\oplus_{i\in I}V_i$ es un subespacio vectorial del producto directo de espacios vectoriales.

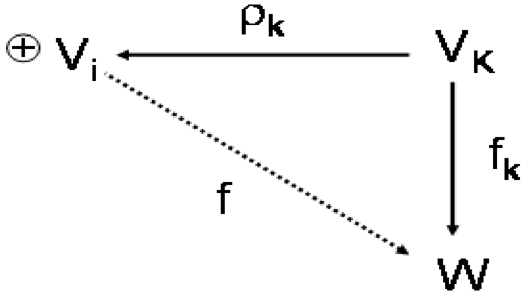
Nota: Si $\#I < \infty$ se tiene que la suma directa de espacios vectoriales y el producto directo de espacios vectoriales es la misma cosa.

6.2.2 DEF: Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\oplus_{i\in I}V_i$ la suma directa de estos espacios vectoriales. Entonces para cada $k \in I$ se define la inclusión canónica de V_k en $\oplus_{i\in I}V_i$ y se representa por

$$\rho_k : V_k \to \oplus_{i\in I}V_i$$

como $\rho_k(v_k) = (x_i)_{i\in I}$ en donde $x_i = 0$ si $i \neq k$ y $x_k = v_k$. Es decir, el vector de $\Pi_{i\in I}V_i$ que tiene todas las coordenadas cero, salvo la k que vale v_k. Es claro que ρ_k es un monomorfismo de espacios vectoriales.

6.2.3 PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LA SUMA DIRECTA DE ESPACIOS VECTORIALES. Sean $\{V_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\oplus_{i\in I}V_i$ la suma directa de estos espacios vectoriales. Entonces para cada espacio vectorial W y cada familia de aplicaciones lineales $f_i : V_i \to W$ existe una única aplicación lineal $f : \oplus_{i\in I}V_i \to W$ tal que para cada $k \in I$ el siguiente diagrama es conmutativo:



Es más, Si $\hat{V}$ es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ Y $g_i : V_i \to \hat{V}$ son una familia de monomorfismos de espacios vectoriales tales que para cada espacio vectorial W y cada familia de aplicaciones lineales $f_i : V_i \to W$ existe una única aplicación lineal $f : \hat{V} \to W$ tal que para cada $k \in I$ el diagrama anterior es conmutativo, entonces $\hat{V}$ es isomorfo a $\oplus_{i\in I}V_i$.

Demo: Vamos a suponer en principio que existe esta aplicación lineal y vamos a demostrar que entonces sólo se puede definir de una única manera, por lo que demostraremos que, caso de existir, es única. Luego veremos que la única posible verifica lo que queremos.

1-. Supongamos que existe $f : \oplus_{i\in I} V_i \to W$ tales que $f \circ \rho_k = f_k$ tenemos entonces que dado $v_k \in V_k$, $f_k(v_k) = f(\rho_k(v_k))$, por lo que $f((v_i)_{i\in I}) = f(\sum_{i\in I}(\rho_i(v_i))) = \sum_{i\in I} f_i(v_i)$. Observar que, aunque no lo parezca, por definición de suma directa está es una suma finita (en espacios vectoriales no podemos sumar un número infinito de vectores).

2-. Comprobemos entonces que la aplicación $f : \oplus_{i\in I} V_i \to W$ definido por $f((v_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} f_i(v_i)$ es una aplicación lineal que verifica el enunciado:

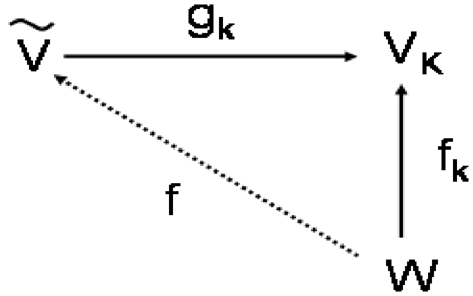
$\star$ ¿Es lineal?

$$\begin{aligned} f(\lambda(v_i)_{i\in I} + (v_i')_{i\in I}) = f((\lambda v_i + v_i')_{i\in I}) &= \sum_{i\in I} f_i(\lambda v_i + v_i') \\ &= \lambda \sum_{i\in I} f_i(v_i) + \sum_{i\in I} f_i(v_i') = \lambda f((v_i)_{i\in I}) + f((v_i')_{i\in I}) \end{aligned}$$

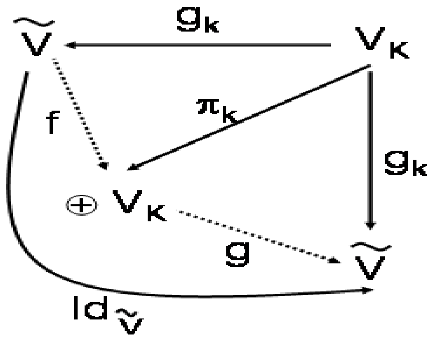
$\star$ ¿Hace conmutativo los diagramas? Pues claro

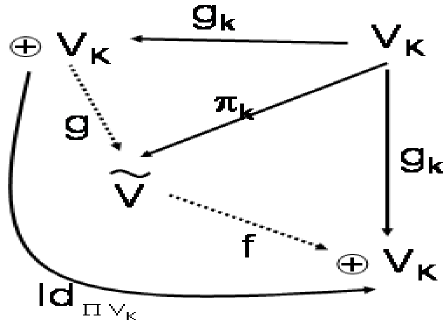
$$f \circ \rho_k(v_k) = f_k(v_k).$$

Veamos ahora que todo espacio vectorial con estas propiedades es isomorfo al producto cartesiano de los $\{V_i\}_{i\in I}$. Sea $\hat{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $g_i : V_i \to \hat{V}$ son una familia de monomorfismos de espacios vectoriales tales que para cada espacio vectorial W y cada familia de aplicaciones lineales $f_i : V_i \to W$ existe una única aplicación lineal $f : \hat{V} \to W$ tal que para cada $k \in I$ el siguiente diagrama es conmutativo:



Si consideramos ahora $W = \oplus_{i\in I} V_i$ y $f_i = \rho_i$ las inclusiones canónicas tenemos, aplicando varias veces esta propiedad fundamental:





En donde $g \circ f = Id_{\hat{V}}$ y $f \circ g = Id_{\oplus V_i}$ lo que demuestra que tanto f como g son isomorfismos, y por tanto $\hat{V}$ y $\oplus_{i \in I} V_i$ son espacios vectoriales isomorfos.

6.3. Espacio vectorial cociente Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio vectorial de V.

$\star$ Podemos entonces definir una relación de equivalencia en V. Dados $v_1, v_2 \in V$ diremos que v_1 está relacionado con v_2 y lo representaremos por $v_1 \approx v_2$ si

$$v_1 \approx v_2 \quad \text{si y sólo si} \quad v_1 - v_2 \in W.$$

Veamos que "$\approx$" es una relación de equivalencia en V:

– Reflexiva: para todo $v \in V$, $v - v = 0 \in W$, por lo que $v \approx v$.

– Transitiva: dados $v_1, v_2, v_3 \in V$ tal que $v_1 \approx v_2$ y $v_2 \approx v_3$, se tiene que $v_1 - v_2 \in W$ y $v_2 - v_3 \in W$. Por tanto $v_1 - v_3 = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) \in W$. Por tanto $v_1 \approx v_3$.

– Simétrica: Dados $v_1, v_2 \in V$ tal que $v_1 \approx v_2$, se tiene que $v_1 - v_2 \in W$. Por tanto el opuesto de este elemento también cae en W, por lo que $v_2 - v_1 = -(v_1 - v_2) \in W$. Así, $v_2 \approx v_1$.

$\star$ Consideremos el conjunto cociente $V/\approx$, que es este caso denotaremos por V/W,

$$V/W := \{[v] \mid v \in V\}.$$

Nota 1: Dado $v \in V$,

$$\begin{aligned}[v] &= \{u \in V \mid v - u \in W\} = \{v \in V \mid v = u + w, \text{ con } w \in W\} \\ &= \{v + w \in V \mid w \in W\} = v + W.\end{aligned}$$

Nota 2: $[\overline{0}] = W$.

$\star$ Vamos a definir una estructura de $\mathbb{K}$ espacio vectorial en este conjunto cociente.

– La suma: dados $[v_1], [v_2] \in V/W$,

$$[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2]$$

– El producto por escalares: dados $[v] \in V/W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda[v] := [\lambda v]$$

Nota: Cuando se define una operación en un conjunto cociente, y ésta se define a partir de representantes, lo primero que hay que comprobar es que está bien definida, es decir:

$\diamond$ Si $[v_1] = [v_1']$ y $[v_2] = [v_2']$, entonces $[v_1 + v_2] = [v_1' + v_2']$
$\diamond$ Si $[v_1] = [v_1']$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $[\lambda v_1] = [\lambda v_1']$

Veamos entonces que están bien definidas:

$\diamond_1$ Sea $v_1, v_1', v_2, v_2' \in V$ tales que $[v_1] = [v_1']$ y $[v_2] = [v_2']$ tenemos entonces que $v_1 - v_1'$ y $v_2 - v_2' \in W$ por tanto

$$v_1 - v_1' + v_2 - v_2' = v_1 + v_2 - (v_1' + v_2') \in W$$

es decir, $[v_1 + v_2] = [v_1' + v_2']$.

$\diamond_2$ Sea $v_1, v_1' \in V$ tales que $[v_1] = [v_1']$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos entonces que $v_1 - v_1' \in W$. Por tanto

$$\lambda(v_1 - v_1') = \lambda v_1 - \lambda v_1' \in W$$

por tanto $[\lambda v_1] = [\lambda v_1']$.

$\star$ Veamos que con estas operaciones $(V/W, +, \ )$ tiene estructura de $\mathbb{K}$ espacio vectorial:

– Es claro que la suma es asociativa:

$$[v_1] + ([v_2] + [v_3]) = [v_1 + (v_2 + v_2)] = [(v_1 + v_2) + v_3] = ([v_1] + [v_2]) + [v_3]$$

– Es claro que la suma es conmutativa:

$$[v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2] = [v_2 + v_1] = [v_2] + [v_1]$$

– Es claro que $[\overline{0}] \in V/W$ es el elemento neutro de la suma:

$$[v_1] + [\overline{0}] = [v_1 + \overline{0}] = [v_1] = [\overline{0} + v_1] = [\overline{0}] + [v_1]$$

– Dado $[v] \in V/W$ es claro ahora que su opuesto es $[-v]$:

$$[v] + [-v] = [v - v] = [\overline{0}] = [-v + v] = [-v] + [v]$$

Es igualmente claro que se verifican las 4 propiedades relativas al producto externo:

– $\lambda([v_1] + [v_2]) = [\lambda(v_1 + v_2)] = [\lambda v_1 + \lambda v_2] = \lambda[v_1] + \lambda[v_2]$.

– $(\lambda + \mu)[v] = [(\lambda + \mu)v] = [\lambda v + \mu v] = \lambda[v] + \mu[v]$.

–$1[v] = [1v] = [v]$.

–$\lambda(\mu[v]) = [\lambda(\mu v)] = [(\lambda\mu)v] = (\lambda\mu)[v]$.

Nota: trabajar con el espacio vectorial cociente es fácil, Es simplemente poner clases a los vectores.

6.3.1 Proposición (Base del espacio vectorial cociente). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea W un subespacio de V. Consideremos V/W el espacio vectorial cociente.

Sea $B' = \{v_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una base de W, por tanto es un conjunto de vectores independientes de V y sea B una base de V que contenga a B', es decir $B = \{v_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \cup \{e_i\}_{i \in I}$.

Nota: Es claro que dado $v_\alpha \in B'$, $[v_\alpha] = [\overline{0}]$ (ya que $v_\alpha \in W$). Por tanto estos vectores no van a poder estar en la base de V/W. Veamos entonces que el conjunto de vectores que se han añadido si forman una base de V/W, es decir, $\overline{B} = \{\overline{e}_i\}_{i \in I}$ es base de V/W

⋄ ¿Son generadores? Dado $[v] \in V/W$, tenemos que $v = \sum \mu_\alpha v_\alpha + \sum \lambda_i e_i$ y por tanto

$$\begin{aligned}[v] &= [\sum \mu_\alpha v_\alpha + \sum \lambda_i e_i] = \sum \mu_\alpha [v_\alpha] + \sum \lambda_i [e_i] = \sum \mu_\alpha [\overline{0}] + \sum \lambda_i [e_i] \\ &= \sum \lambda_i [e_i]\end{aligned}$$

⋄ ¿Son independientes? Si $\sum \lambda_i [e_i] = [\overline{0}]$, entonces $\sum \lambda_i e_i - \overline{0} \in W$ y por tanto $\sum \lambda_i e_i = \sum \mu_\alpha v_\alpha$ por tanto, al ser B base de V, $\lambda_i = \mu_\alpha = 0 \; \forall \alpha \in \mathcal{A}, \, i \in I$.

6.3.2 Corolario. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión n. Sea W un subespacio vectorial de dimensión m. Entonces

$$\dim_{\mathbb{K}}(V/W) = n - m.$$

6.4. El espacio vectorial "Hom" Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Veamos que podemos dotar de estructura de $\mathbb{K}$ espacio vectorial al conjunto de todos los homomorfismos de V en W.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W) = \{f : V \to W \mid \text{con } f \text{ una aplicación lineal de } V \text{ en } W\}$$

$\star$ Definimos la suma:

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) \quad \forall v \in V$$

$\star$ Definimos el producto externo:

$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v) + g(v) \quad \forall v \in V$$

Nota: Para esta estructura de espacio vectorial, sólo nos hacia falta que W fuera un $\mathbb{K}$ espacio vectorial (ver el último ejercicio de la relación 3).

6.4.1 Proposición. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$. Supongamos que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ y $\dim_{\mathbb{K}} W = m$. Entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ es isomorfo, como espacio vectorial a $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Es más, si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $B' = \{w_,.w_2, \ldots, w_m\}$ es una base de W, la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{B'B}: & Hom_{\mathbb{K}}(V,W) & \to & \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & A^f_{B'B} \end{array}$$

en donde $A_f^{B'B}$ denota la matriz asociada a f respecto de las bases B y B', es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demo: Recordamos que para calcular la matriz asociada a f respecto de las bases B y B' se calculan las imágenes por f de los elementos de la base de B y se escriben como combinación lineal de elementos de B' (es decir, se calculan sus coordenadas respecto de B'). Es decir:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_{11}w_1 + \lambda_{12}w_2 + \ldots + \lambda_{1m}w_m \\ f(v_2) &= \lambda_{21}w_1 + \lambda_{22}w_2 + \ldots + \lambda_{2m}w_m \\ &\vdots \\ f(v_n) &= \lambda_{n1}w_1 + \lambda_{n2}w_2 + \ldots + \lambda_{nm}w_m \end{aligned}$$

Entonces estas coordenadas puestas en columnas nos dan la matriz que buscamos:

$$A^f_{B'B} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \dots & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{1m} & \lambda_{2m} & \dots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Es claro, que $\Psi_{B'B}(f+g) = \Psi_{B'B}(f)+\Psi_{B'B}(f)$ y que $\Psi_{B'B}(\lambda f) = \lambda\Psi_{B'B}(f)$, es decir, $\Psi_{B'B}$ es un homomorfismo de espacios vectoriales.

$\star$ Veamos que $\Psi_{B'B}$ es inyectiva. Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)$ tal que $\Psi_{B'B}(f) = A^f_{B'B} = 0$. Entonces, por construcción, las coordenadas de las imágenes de cada elemento de B respecto de B' son cero (si $A^f_{B'B} = 0$, f manda los vectores de la base B a cero) por lo que f es nula, i.e., f es inyectiva.

$\star$ Veamos que $\Psi_{B'B}$ es sobreyectiva. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, sea $f = f_{B'} \circ A \circ f_B^{-1}$, entonces, otra vez por construcción, $\Psi_{B'B}(f) = A$.

6.4.2 Corolario. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Supongamos que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ y $\dim_{\mathbb{K}} W = m$. Entonces $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)) = nm$.

Nos vamos a encontrar con una relación todavía mas estrecha entre el espacio vectorial Hom y las matrices:

6.4.3 Proposición. Sean V, W y U tres espacios vectoriales de dimensiones finitas (n,m y s respectivamente) sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ con bases B, B' y B'' (resp.). Sean $f : V \to W$ y $g : W \to U$ dos aplicaciones lineales con matrices asociadas respecto de estas bases $A^f_{B'B}$ y $A^g_{B''B'}$. Entonces

$$A^{g\circ f}_{B''B} = A^g_{B''B'} A^f_{B'B}$$

es decir, la matriz asociada a $g \circ f$ respecto de las bases B y B'' es el producto matricial de las dos anteriores.

6.4.4 Corolario. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea B una base de V. Entonces la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{BB} : & Hom_{\mathbb{K}}(V,V) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & A^f_{BB} \end{array}$$

es un isomorfismo de anillos. Es decir, es una aplicación lineal que va bien con la suma, la multiplicación por escalares y con el producto.

Nota: Esto tiene implicaciones importantes. Por ejemplo, Demostrar que el producto de matrices es asociativo o distributivo es complicado, con este corolario se vuelve trivial. Si tengo $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ como Ψ_{BB} es biyectiva existe aplicaciones lineales f_A, f_B y f_C de V en V tales que $\Psi(f_A) = A$, $\Psi(f_B) = B$ y $\Psi(f_C) = C$. Es más,

$$(f_A + f_B) \circ f_C = f_A \circ f_C + f_B \circ f_C$$

lo que implica, si aplicamos Ψ en ambos lados de la igualdad que

$$(A + B)C = AC + BC.$$

La propiedad asociativa es equivalente.

6.5. El espacio vectorial dual. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se define el espacio vectorial dual y se denota por V^* como

$$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}).$$

6.5.1 Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces $B^* = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset V^*$ en donde para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

es una base de V^*.

6.5.2 Ejemplo. Sea $V = \mathbb{R}^{''}$ y consideremos $B = \{(1,1), (0,1)\}$ base de V. Calcula la base dual de B y da las coordenadas de $f \in V^*$ definido por $f(x, y) = 5x + 7y$ respecto de esta base dual.

Buscamos dos aplicaciones lineales $f_1, f_2 \in V^*$ tales que:

$$\begin{array}{cccc} f_1: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (1,1) & \mapsto & 1 \\ & (1,0) & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} f_2: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (1,1) & \mapsto & 0 \\ & (1,0) & \mapsto & 1 \end{array}$$

Tenemos entonces que dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $(x, y) = y(1,1) + (x-y)(1,0)$. Por tanto,

$$f_1(x,y) = f_1(y(1,1) + (x-y)(1,0)) = yf_1(1,1) + (x-y)f_1(1,0) = y$$
$$f_2(x,y) = f_2(y(1,1) + (x-y)(1,0)) = yf_2(1,1) + (x-y)f_2(1,0) = x - y$$

Luego esta es la base dual. Es más, por lo anterior

$$f = f(1,1)f_1 + f(1,0)f_2 = 12f_1 + 5f_2.$$

6.5.3 COROLARIO. Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión finita, V y V^* son isomorfos.

Nota: Si V tiene dimensión infinita, V nunca es isomorfo a V^*. Por ejemplo, si $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \aleph_0$, y $\dim_{\mathbb{K}}(V^*) = \aleph_1$.

Podemos preguntarnos ahora que sucede si hacemos el dual del dual de un espacio vectorial, es decir V^{**}, que normalmente se llama el bi-dual, o segundo dual de V. Veamos que en general V es isomorfo a un subespacio de V^{**}.

6.5.4 PROPOSICIÓN. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea V^{**} el segundo dual de V. Entonces la aplicación $\Phi : V \to V^{**}$ definida por

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & V & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V^*, \mathbb{K}) \\ & v & \mapsto & \Phi_v : V^* \to \mathbb{K} \\ & & & \qquad f \ \mapsto f(v) \end{array}$$

es un monomorfismo de espacios vectoriales. Es más, Φ es un isomorfismo de espacios vectoriales si y sólo si $\dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty$

7. RANGO DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Durante esta sección todos los espacios vectoriales que aparezcan serán de dimensión finita. Por lo que nos permitirá trasladar propiedades de aplicaciones lineales a matrices y viceversa.

7.1. DEF: Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Se define el rango de f, y se representa por $\mathrm{Rang}(f)$, como:

$$\mathrm{Rang}(f) := \dim_{\mathbb{K}}(Im(f))$$

Nota: Recordamos que dados V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $f : V \to W$ una aplicación lineal y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V, se tiene que $f(B) = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$, por lo que para calcular una base de $Im(f)$ solo tendremos que quedarnos con un conjunto maximal de vectores independientes de $f(B)$.

7.2. TEOREMA. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces:

(i) Se verifica la formula de las dimensiones:

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} V$$

(ii) Existe B una base de V y B' una base de W tal que la matriz asociada a f respecto de estas bases es

$$A^f_{B'B} = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en donde $r = \operatorname{Rang}(f)$. Es más, si la matriz asociada a f respecto de dos bases $\hat{B}$ y $\hat{B}'$ es de la forma $\begin{pmatrix} Id_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $s = \operatorname{Rang}(f)$.

Demo. Vamos a demostrar el apartado (ii), ya que en la demostración quedará patente (i). La forma de demostrarlo va a ser constructiva, por lo que nos va a dar un algoritmo que podremos aplicar a un caso concreto.

1-. Calculamos el núcleo de f y obtenemos una base de él (teóricamente lo podemos hacer porque hemos demostrado que todo espacio vectorial posee base). Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ una base de $\operatorname{Ker}(f)$.

2-. Por ser $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ base de $\operatorname{Ker}(f)$, es un conjunto de vectores independientes de V, por lo que podemos completar hasta obtener una base de V (los elementos con los que completamos los colocamos delante de la base del $\operatorname{Ker}(f)$). Sea $B = \{v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_s\}$ base de V.

3-. Veamos que la imagen de los vectores que hemos añadido, es decir, $\{f(v_{s+1}), f(v_{s+2}), \ldots, f(v_n)\}$ es base de $\operatorname{Im}(f)$. Sabemos que

$$f(B) = \{f(v_{s+1}), f(v_{s+2}), \ldots, f(v_n), f(v_1), \ldots, f(v_s)\}$$

es un sistema de generadores de $\operatorname{Im}(f)$. Pero como $v_1, v_2, \ldots, v_s \in \operatorname{Ker}(f)$, se tiene que $f(v_1) = f(v_2) = \ldots = f(v_s) = 0$, por lo que $\{f(v_{s+1}), f(v_{s+2}), \ldots, f(v_n)\}$ es un sistema de generadores de $\operatorname{Im}(f)$. Veamos que son independientes. Supongamos

$$0 = \lambda_{s+1} f(v_{s+1}) + \ldots + \lambda_n f(v_n) = f(\lambda_{s+1} v_{s+1} + \ldots + \lambda_n v_n)$$

por lo que $\lambda_{s+1} v_{s+1} + \ldots + \lambda_n v_n \in ker(f)$ y por tanto se puede escribir como combinación lineal de elementos de la base de $\operatorname{Ker}(f)$. Así,

$$\lambda_{s+1} v_{s+1} + \ldots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s$$

y al ser B una base de V todos los λ_i son cero, como queríamos demostrar.

4-. Por ser $\{f(v_{s+1}), f(v_{s+2}), \ldots, f(v_n)\}$ base de $\mathrm{Im}(f)$, es un conjunto de vectores independientes de W, por lo que podemos completar hasta obtener una base de W. Sea $B' = \{f(v_{s+1}), f(v_{s+2}), \ldots, f(v_n), w_1, w_2, \ldots, w_k\}$

5-. Veamos que la matriz asociada a f respecto de las bases B y B' es de la forma que queremos.

$$
\begin{aligned}
f(v_{s+1}) &= 1f(v_{s+1}) + 0f(v_{s+2}) + 0f(v_{s+3}) + \ldots + 0f(v_n) + 0w_1 + \ldots + 0v_k \\
f(v_{s+2}) &= 0f(v_{s+1}) + 1f(v_{s+2}) + 0f(v_{s+3}) + \ldots + 0f(v_n) + 0w_1 + \ldots + 0v_k \\
&\vdots \\
f(v_n) &= 0f(v_{s+1}) + 0f(v_{s+2}) + 0f(v_{s+3}) + \ldots + 1f(v_n) + 0w_1 + \ldots + 0v_k \\
f(v_1) &= 0f(v_{s+1}) + 0f(v_{s+2}) + 0f(v_{s+3}) + \ldots + 0f(v_n) + 0w_1 + \ldots + 0v_k \\
f(v_2) &= 0f(v_{s+1}) + 0f(v_{s+2}) + 0f(v_{s+3}) + \ldots + 0f(v_n) + 0w_1 + \ldots + 0v_k \\
&\vdots \\
f(v_s) &= 0f(v_{s+1}) + 0f(v_{s+2}) + 0f(v_{s+3}) + \ldots + 0f(v_n) + 0w_1 + \ldots + 0v_k
\end{aligned}
$$

por lo que su matriz asociada es $A^f_{B'B} = \begin{pmatrix} Id_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en donde $r = n - s = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)$. Es más,

$$\dim_{\mathbb{K}} Ker(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(F) = s + (n - s) = n = \dim_{\mathbb{K}} V.$$

Veamos por último que si tengo $\hat{B} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \ldots, \hat{v}_n\}$ base de V y $\hat{B}' = \{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \ldots, \hat{w}_m\}$ de W tales que la matriz asociada a f respecto de $\hat{B}$ y $\hat{B}'$ es de la forma $\begin{pmatrix} Id_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $s = \mathrm{Rang}(f)$. Al ser la matriz asociada ésta, $f(\hat{B}) = \{f(\hat{v}_1), f(\hat{v}_2), \ldots, f(\hat{v}_n)\} = \{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \ldots, \hat{w}_s\}$, por tanto $\{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \ldots, \hat{w}_s\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$ y además son independientes, al estar contendidos en una base de W. Así, es base de $\mathrm{Im}(f)$ por lo que s es la dimension de la imagen, es decir, $s = \mathrm{Rang}(f)$. ■

Nota: Recordamos que dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, con $\mathbb{K}$ un cuerpo, podemos construir la aplicación lineal, $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por

$$f_A((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y que la matriz asociada a esta aplicación lineal respecto de las bases canónicas es precisamente A. Es decir, si C es la base canónica de $\mathbb{K}^n$ y C' es la base canónica de $\mathbb{K}^m$, entonces $A^f_{C'C} = A$.

7.3. Corolario. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces existen dos matrices inversibles, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ tales que $QAP = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Demo: Consideramos la aplicación lineal $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, entonces, por el teorema anterior, existe B base de $\mathbb{K}^n$ y B' base de $\mathbb{K}^m$ tales que la matriz asociada a f_A respecto de estas bases es de la forma $\begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ahora, aplicando la relación existente entre dos matrices asociadas a un mismo endomorfismo respecto de distintas bases tenemos que

$$\begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A^{f_A}_{B'B} = C_{B'C'} A^{f_A}_{C'C} C_{CB} = C_{B'C'} A C_{CB}.$$

Por tanto $Q = C_{B'C'}$ y $P = C_{CB}$ son las matrices inversibles, al ser matrices de cambio de base, que nos demuestran el corolario. ■

Nos va a interesar definir una cierta relación de equivalencia en el conjunto de las matrices de tamaño $m \times n$ sobre un cuerpo K.

7.4. Def: Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diremos que A es una matriz equivalente a B, y lo representaremos $A \equiv B$, si existen dos matrices inversibles, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ tales que $QAP = B$.

7.5. Lema I. La relación “ser equivalente a” es una relación de equivalencia en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Demo: Veamos que esta relación verifica las propiedades reflexiva, transitiva y simétrica.

– Reflexiva. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $A = Id_m A Id_n$, por tanto $A \equiv A$.

– Transitiva. Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tales que $A \equiv B$ y $B \equiv C$. Tenemos entonces que existen matrices $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ y $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles tales que $Q_1AP_1 = B$ y $Q_2BP_2 = C$. Entonces $(Q_2Q_1)A(P_1P_2) = C$ con Q_2Q_1 y P_1P_2 matrices inversibles al ser producto de dos matrices inversibles. Por tanto $A \equiv C$

– Simétrica. Supongamos que $QA \equiv B$, entonces existen matrices inversibles $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ y $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que $QAP = B$. Entonces $Q^{-1}BP^{-1} = A$ con lo que $B \equiv A$. ■

7.6. Teorema. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces A es equivalente a B si y sólo si A y B son matrices asociadas un mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

La demostración de este Teorema la vamos a dividir en una serie de proposiciones que tendrán interés por sí mismas.

7.6.1 Proposición I Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Supongamos que A y B son matrices asociadas a una misma aplicación lineal respecto de bases distintas. Entonces $A \equiv B$.

Demo: Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal y sean $B, \hat{B}$ bases de V y $B', \hat{B}'$ bases de W tales que $A = A^f_{B'B}$ y $B = A^f_{\hat{B}'\hat{B}}$. Entonces, existen matrices de cambio de base, $Q = C_{\hat{B}'B'}$ y $P = C_{\hat{B},B}$, y por tanto inversibles, tales que $C_{\hat{B}'B'}AC_{B\hat{B}} = B$. es decir, A y B son matrices equivalentes. ■

Nota: Si nos damos cuanta, parece que hemos obtenido algo más. No sólo A y B son matrices equivalentes, sino que las matrices P y Q que aparecen son matrices del cambio de base. Como veremos a continuación éste no es un hecho sorprendente.

7.6.2 Proposición II Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces P es una matriz inversible si y sólo si P es una matriz de cambio de base (es decir, existen B y B' bases de $\mathbb{K}^n$ tales que $C_{B'B} = P$).

Es más, si C es la base canónica de $\mathbb{K}^n$ y P es una matriz inversible, $B = \{Pe_1, Pe_2, \ldots, Pe_n\}$ es base de $\mathbb{K}^n$ y $C_{CB} = P$.

Demo: Ya sabemos, que $P = C_{B'B}$ es la matriz de cambio de base entre B y B', entonces P es inversible con inversa $C_{BB'}$ (el cambio opuesto).

Veamos el recíproco, que es el interesante. Supongamos que P es una matriz inversible. Tenemos entonces que la aplicación lineal $f_P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ tiene por inversa a $f_{P^{-1}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ya que $f_P \circ f_{P^{-1}} = Id_{\mathbb{K}^n} = f_{P^{-1}} \circ f_P$. Por tanto, f_P es un isomorfismo de espacios vectoriales y así, si consideramos $C = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$,

$$B := f_P(C) = \{Pe_1, Pe_2, \ldots, Pe_n\}$$

es base de $\mathbb{K}^n$. Por último C_{CB}, la matriz de cambio de base de B a C, es P (como C es la base canónica, la matriz de cambio de base de B a C es tomar los vectores de B y ponerlos en columnas, pero Pe_1 es la primera columna de P, Pe_2 la segunda, etc). ■

Nota: La matriz de cambio de base de C a B es $C_{BC} = P^{-1}$.

7.6.3 Proposición III Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean A y B dos matrices equivalentes de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ es una aplicación lineal que tiene por matriz asociada tanto a A como a B.

Demo: Por definición existen dos matrices inversibles $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ tales que $QAP = B$. Sean

$$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \qquad C = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \qquad \text{y} \qquad C' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_m\}$$

en donde f_A es la aplicación lineal asociada a A, y C y C' son las bases canónicas de $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$ respectivamente. Entonces, como ya sabemos,

$$A^f_{C'C} = A.$$

Por otro lado, como P es una matriz inversible,

$$B = f_P(C) = \{Pe_1, Pe_2, \ldots, Pe_n\}$$

es base de $\mathbb{K}^n$ y $C_{BC} = P^{-1}$, ver (7.6.2). De forma similar, como Q^{-1} es una matriz inversible,

$$B' = f_{Q^{-1}}(C') = \{Q^{-1}e'_1, Q^{-1}e'_2, \ldots, Q^{-1}e'_m\}$$

es base de $\mathbb{K}^m$ y $C_{B'C'} = Q$ (es decir, si las coordenadas de un vector v respecto de la base canónica son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces las coordenadas de v respecto de B' son $f_Q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Por último, calculemos la matriz asociada a f_A respecto de las bases B y B': dado el vector Pe_i, las coordenadas de $f_A(Pe_i)$ respecto de la base canónica de

$\mathbb{K}^m$ son APe_i, por lo que sus coordenadas respecto de B' son $QAPe_i$, es decir, Be_i, la columna i-esima de la matriz B. Así, la matriz asociada a f_A respecto de B y B' es precisamente B. ■

7.7. DEF: Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se define el rango de A, y se representa por $\mathrm{Rang}(A)$ como el rango de la aplicación lineal asociada f_A.

7.8. PROPOSICIÓN. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces el rango de A coincide con el número máximo de columnas linealmente independientes de la matriz A.

Demo: Recordamos que dada una aplicación lineal $f : V \to W$, si B es una base de V, $f(B)$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$. Por tanto si consideramos C la base canónica de $\mathbb{K}^n$, $f_A(C)$ son precisamente las columnas de A, por lo que una base de $Im(f_A)$ estará compuesta por un número máximo de vectores independientes dentro de $f_A(C)$. ■

Nota: El rango de una matriz en la forma $\begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es precisamente r.

7.9. TEOREMA. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Sea B una base de V y B' base de W. Entonces $\mathrm{Rang}(A^f_{B'B}) = \mathrm{Rang}(f)$. Es decir, el rango de f coincide con el rango de cualquier matriz asociada a f.

Demo: La relación existente entre f y su matriz asociada respecto de las bases B y B' queda expuesta en el siguiente diagrama conmutativo:

Veamos que la aplicación $f_{B'}|_{\mathrm{Im}(f))} : \mathrm{Im}(f)) \to \mathrm{Im}(f_{A^f_{B'B}})$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, por lo que

$$\mathrm{Rang}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(f)) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(f_{A^f_{B'B}}) = \mathrm{Rang}(A^f_{B'B})))$$

i-. Dado $y \in \mathrm{Im}(f)$, tenemos que ver que $f_{B'}(y) \in \mathrm{Im}(f_{A^f_{B'B}})$. Por definición existe $x \in V$ tal que $f(x) = y$. Por tanto $y = f_{B'} \circ f(x) = f_{A^f_{B'B}} \circ f_B(x) \in \mathrm{Im}(f_{A^f_{B'B}})$.

ii-. Como $f_{B'}$ era un isomorfismo de espacios vectoriales,, cuando restringimos a $\mathrm{Im}(f)$, seguimos teniendo que verifica la condición de aplicación lineal, y que es inyectiva.

iii-. Veamos por último que es sobreyectiva. Dado $w \in \mathrm{Im}(f_{A^f_{B'B}})$, existe $u \in \mathbb{K}^n$ tal que $f_{A^f_{B'B}}(u) = w$ y como f_B es un isomorfismo, existe $v \in V$ tal que $f_B(v) = u$. Por tanto $w = f_{A^f_{B'B}} \circ f_B(v) = f_{B'} \circ f(v)$, lo que demuestra el teorema. ■

7.10. Corolario. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ son equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango.

Demo: Si A y B son equivalentes, están asociadas a un mismo homomorfismo y por tanto el rango de ambas coincide con el rango de este homomorfismo. Recíprocamente, si A y B tienen el mismo rango, digamos r, entonces por (7.3.), A es equivalente a una matriz de la forma $\begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en donde r, por la implicación anterior, es el rango de A. De forma similar, B es equivalente a $\begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y por tanto, como ser equivalente a es una relación de equivalencia, A y B son equivalentes. ■

7.11. Proposición. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces A es inversible si y sólo si $\mathrm{Rang}(A) = n$.

Demo: Si A es inversible, existe $A^{-1}\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = Id_n = A^{-1}A$. Entonces A es equivalente a la matriz identidad y por tanto $\mathrm{Rang}(A) = n$. Recíprocamente, si $\mathrm{Rang}(A) = n$ existen matrices inversible P y Q tales que $QAP = Id_n$ y por tanto $A = Q^{-1}P^{-1}$ que es inversible al ser producto de matrices inversibles. ■

7.12. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. En lo que sigue veremos que $\mathrm{Rang}(A)$ coincide con el máximo número de filas linealmente independientes de A (que a su vez coincidía con el máximo número de columnas independientes de A). Para la demostración de este Teorema vamos a introducir la noción de matriz transpuesta.

7.12.1 Def: Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Al elemento que ocupa el lugar (i,j) en la matriz A lo vamos a denotar por $A(i,j)$. Se define la matriz transpuesta de A y se representa por A^t, como la matriz que verifica:

$$A^t(i,j) := A(j,i).$$

Observar que $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$.

Veamos un ejemplo: si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Nota: Las filas (resp. columnas) de A se transforman en columnas (resp. filas) de A^t.

7.12.2 PROPOSICIÓN. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n\times s}(\mathbb{K})$ y $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces:

(i) $(A + B)^t = A^t + B^t$ (en este caso ambas matrices tienen el mismo tamaño).

(ii) $(CD)^t = D^t C^t$.

(iii) $(A^t)^t = A$.

(iv) $Id_n^t = Id_n$

(v) $(E^{-1})^t = (E^t)^{-1}$ (en este caso E es una matriz inversible y cuadrada).

Demo: (i). Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces:

$$(A+B)^t(i,j) = (A+B)(j,i) = A(j,i)+B(j,i) = A^t(i,j)+B^t(i,j) = (A^t+B^t)(i,j)$$

(ii). Sea $C \in\in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $D \in \mathcal{M}_{n\times s}(\mathbb{K})$. Entonces

$$CD(i,j) = \sum_{r=1}^{n} C(i,r)D(r,j) \qquad \text{y} \qquad D^tC^t(i'.j') = \sum_{r=1}^{n} D^t(i',r)C^t(r,j')$$

Luego,

$$D^tC^t(j,i) = \sum_{r=1}^{n} D^t(j,r)C^t(r,i) = \sum_{r=1}^{n} D(r,j)C(i,r) =$$
$$\sum_{r=1}^{n} C(i,r)D(r,j) = CD(i,j)$$

es decir, $(CD)^t = D^tC^t$.

(iii) y (iv) son triviales.

(v). Tenemos que $EE^{-1} = Id = E^{-1}E$. Por tanto, si “transponemos” en esta igualdad obtenemos:

$$Id = (Id)^t = (EE^{-1})^t = (E^{-1})^t E^t$$
$$Id = (Id)^t = (E^{-1}E)^t = E^t(E^{-1})^t$$

es decir, $(E^{-1})^t$ es la inversa de E^t. ■

Nota: Una aplicación de un anillo en si mismo, en este caso el anillo de las matrices cuadradas de orden n, con las propiedades (i), (ii) y (iii) se la denomina involución.

7.12.3 PROPOSICIÓN. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^t)$.

Demo: Sabemos, que dada $a \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ existen $p \in\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ tales que $QAP = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces, por (7.12.2),

$$P^tA^tQ^t = (QAP)^t = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que demuestra que $\mathrm{Rang}(A^t) = r$. ■

7.13. TEOREMA. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces $\mathrm{Rang}(A)$ coincide con el máximo número de filas linealmente independientes de A (que a su vez coincidía con el máximo número de columnas independientes de A).

Demo: Tenemos entonces que el rango de A coincide con el rango de A^t. Pero el rango de A^t es el número de columnas independientes de A^t, que no es más que el número de filas independientes de A. ■

8. TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

En la sección anterior hemos demostrado que dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ en donde $\mathbb{K}$ denota un cuerpo existen matrices inversibles $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ y $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que

$$PAQ = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pero para encontrar estas matrices, tenemos que construir una aplicación lineal y ciertos matrices de cambio de base. Veamos en esta sección un método directo para abordar este problema.

8.1. DEF: Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Las siguientes manipulaciones sobre A se dice que son transformaciones elementales.

Tipo I. Intercambiar dos filas o dos columnas de A.

Tipo II. Sumar a una fila (resp. columna) otra fila (resp. columna) multiplicada por un escalar.

Tipo III. Multiplicar una fila o una columna por un escalar no nulo.

En el siguiente teorema se demuestra que hacer transformaciones elementales en una matriz no es más que multiplicar ésta, a derechas o a izquierdas, por una matriz conveniente (la matriz identidad a la que previamente se le ha hecho el mismo cambio).

8.2. Teorema. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces:

(i$_1$). Sea $I_{(i\leftrightarrow j)}$ la matriz que obtenemos al intercambiar la fila i por la fila j en la matriz identidad. Entonces $I_{(i\leftrightarrow j)}A$ es la matriz que obtenemos al intercambiar la fila i por la fila j en A. Notar que $I_{(i\leftrightarrow j)}$ es inversible con inversa ella misma, es decir, $(I_{(i\leftrightarrow j)})^2 = Id$.

(i$_2$). Sea $I^{[i\leftrightarrow j]}$ la matriz que obtenemos al intercambiar la columna i por la columna j en la matriz identidad. Entonces $AI^{[i\leftrightarrow j]}$ es la matriz que obtenemos al intercambiar la columna i por la columna j en A. Notar que $I^{[i\leftrightarrow j]}$ es inversible con inversa ella misma, es decir, $(I^{[i\leftrightarrow j]})^2 = Id$.

(ii$_1$). Sea $I_{(i+\lambda j)}$ la matriz que obtenemos al sumar a la fila i la fila j multiplicada por $\lambda \in \mathbb{K}$ en la matriz identidad. Entonces $I_{(i+\lambda j)}A$ es la matriz que obtenemos al sumar a la fila i la fila j multiplicada por $\lambda \in \mathbb{K}$ en A. Notar que $I_{(i+\lambda j)}$ es inversible con inversa $I_{(i-\lambda j)}$, es decir, $I_{(i+\lambda j)}I_{(i-\lambda j)} = I_{(i-\lambda j)}I_{(i+\lambda j)} = Id$.

(ii$_2$). Sea $I^{[i+\lambda j]}$ la matriz que obtenemos al sumar a la columna i la columna j multiplicada por $\lambda \in \mathbb{K}$ en la matriz identidad. Entonces $AI^{[i+\lambda j]}$ es la matriz que obtenemos al sumar a la columna i la columna j multiplicada por λ en A. Notar que $I^{[i+\lambda j]}$ es inversible con inversa $I^{[i-\lambda j]}$, es decir, $I^{[i+\lambda j]}I^{[i-\lambda j]} = I^{[i-\lambda j]}I^{[i+\lambda j]} = Id$.

(iii$_1$). Sea $I_{(i\to\lambda i)}$ la matriz que obtenemos al multiplicar la fila i por $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ en la matriz identidad. Entonces $I_{(i\to\lambda i)}A$ es la matriz que obtenemos al multiplicar la fila i por λ en A. Notar que $I_{(i\to\lambda i)}$ es inversible con inversa $I_{(i\to\lambda^{-1} i)}$, es decir, $I_{(i\to\lambda i)}I_{(i\to\lambda^{-1} i)} = I_{(i\to\lambda^{-1} i)}I_{(i\to\lambda i)} = Id$.

(iii$_2$). Sea $I^{[i\to\lambda i]}$ la matriz que obtenemos al multiplicar la columna i por $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ en la matriz identidad. Entonces $AI^{[i\to\lambda i]}$ es la matriz que obtenemos al multiplicar la columna i por λ en A. Notar que $I^{[i\to\lambda i]}$ es inversible con inversa $I^{[i\to\lambda^{-1} i]}$, es decir, $I^{[i\to\lambda i]}I^{[i\to\lambda^{-1} i]} = I^{[i\to\lambda^{-1} i]}I^{[i\to\lambda i]} = Id$.

Demo: Es una mera comprobación.

Nota: El producto de matrices inversibles es inversible. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son inversibles con inversas A^{-1} y B^{-1} entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

8.3. TEOREMA. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Entonces haciendo transformaciones elementales en A obtenemos una matriz tipo $A' = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es más, como hacer transformaciones elementales es multiplicar por matrices inversible, A' es equivalente a A y por tanto $r = \mathrm{Rang}(A)$.

Demo: La demostración de este teorema es precisamente el algoritmo que nos permitirá abordar un caso particular. Sea $A = (a_{ij})$, entonces:

1-. Si $A = 0$ no tenemos nada que demostrar. En caso contrario existe un $a_{ij} \neq 0$. haciendo cambios en filas y en columnas colocamos este elemento en el lugar $(1, 1)$. (transformaciones tipo I.

2-. Multiplicamos la fila 1 (o la columna 1) por un escalar adecuado para que en el lugar $(1, 1)$ aparezca el uno. Transformación tipo III.

3-. Haciendo transformaciones tipo II, hacemos ceros en la primera columna y después en la primera fila.

4-. Obtenemos una matriz en la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$. repetimos entonces los pasos de 1 a 3 en A'. ■

Nota: Aplicando los dos teoremas anteriores, (8.2.) y (8.3.), para obtener las matrices P y Q, solo tenemos que ir apuntando, convenientemente, las transformaciones elementales que vamos haciendo. Por tanto, si colocamos la matriz A, la matriz identidad de tamaño n y la matriz identidad de tamaño m en la forma:

$$\begin{array}{cc} Id_m & A \\ & Id_n \end{array}$$

y al hacer en A un cambio por filas, lo hacemos en toda la fila, y si al hacer en A un cambio por columnas lo hacemos en toda la columna, las matrices que nos aparecen al terminar este proceso serán precisamente Q y P. Es decir,

$$QAP = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.4. COROLARIO. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matriz inversible. Entonces haciendo cambios sólo por filas (o sólo por columnas) podemos calcular la inversa de A.

Bibliografía

P. Alberca, D. Martín: "Métodos Matemáticos", *Ediciones Aljibe*, 2001.

E. Hernandez: "Álgebra y Geometría", *Addison-Wesley*, 1994.

M. Castellet, I. Llerena: "Álgebra lineal y Geometría", *Reverté*, 1991.