APUNTES SOBRE SISTEMAS TRIPLES

June 12, 2005

1 Paso de propiedades entre estructuras

Estudiaremos las álgebras alternativas. Si A es un álgebra denotaremos por $N(A) \subset A$ su núcleo. Estudiaremos las propiedades de $N(A)$.

Estudiaremos también los sistemas de Jordan.

- J Álgebras.
- V Pares.
- T Sistemas Triples.

Nos centraremos en la construcción $TKK(V) = L$ álgebra de Lie tres graduadas.

La idea es que las propiedades en un par inducen propiedades en el álgebra.

En la tesis doctoral de Ester García se estudian conceptos como

- no degenerada.
- fuertemente primo.
- simple.
- primitivo (introduce este concepto solo en algebras tres graduadas).

2 Algebras Alternativas (Rings that are nearly associative)

Definición 2.1 *Sea Φ un anillo de escalares (conmutativo, unitario, sin divisores de cero, asociativo), se dice que A es una Φ-Álgebra si*

- *A es un Φ-módulo.*

- *En A hay definido un producto bilineal (se da la propiedad distributiva).*

Definición 2.2 *Sea A una Φ-álgebra. Se define el conmutador de A $[,]: A \times A \to A$, como:*

$$(x, y) \to [x, y] = x * y - y * x$$

El conmutador es bilineal, y el Álgebra A es conmutativa si el conmutador es la aplicación nula.

Definición 2.3 *Se define el asociador de un álgebra A a la aplicación trilineal definida por $(,,): A \times A \times A \to A$:*

$$(x, y, z) = (x * y) * z - x * (y * z).$$

Es claro que A es asociativa si y solo si $(,,) = 0$.

Definición 2.4 *Se dice que un Φ-álgebra A es alternativa si para cualesquiera $x, y \in A$ se tiene que*

$$x^2 y = x(xy) \quad yx^2 = (yx)x,$$

es decir $(x, x, y) = 0 = (y, x, x)$.

Teorema 2.5 *Todo algebra alternativa verifica la identidad flexible:*

$$(xy)x = x(yx),$$

es decir, $(x, y, x) = 0$.

Comentario 2.6 *Luego en un álgebra alternativa tiene sentido considerar el producto xyx. En un álgebra de este tipo es muy importante lo que se denomina Linealizaciones (quitar cuadrados).*

Demostración: Observemos que

$$0 = (x+z, x+z, y) = (x, x, y)+(x, z, y)+(z, x, y)+(z, z, y) = (x, z, y)+(z, x, y)$$

de donde se tiene que

$$(x, z, y) = -(z, x, y)$$

por tanto tenemos que $(x, y, z) = -(y, x, z)$ y $(x, y, z) = -(x, z, y)$. Si $z = x$ entonces de ámbas ecuaciones obtenemos que $(x, y, x) = 0$ que es lo que queríamos demostrar.

Problema 2.7 *Un álgebra es DM si* $(x, y, z) = -(y, x, z)$ *y* $(x, y, z) = -(x, z, y)$. *Para* $x = y$ *se tiene que* $(x, x, z) = -(x, x, z)$ *es decir* $2(x, x, z) = 0$. *Si la característica del cuerpo es distinta de* 2 *entonces* $(x, x, z) = 0$. *La pregunta es: ¿Existen álgebras DM que no sean alternativas?*

Ejemplos de álgebras alternativas son las álgebras asociativas.

Teorema 2.8 *Sea* A *un álgebra alternativa y sean* $x, y, z \in A$ *tales que* $(x, y, z) = 0$. *Entonces, la subálgebra generada por* $\{x, y, z\}$ *es asociativa.*

Las subálgebras generadas por dos elementos son asociativas. Las álgebras alternativas son las más asociativas dentro de las no asociativas. De hecho se tiene lo siguiente:

> A es alternativa si y solo si las subálgebras generadas por dos elementos son asociativas.

Toda álgebra alternativa es de potencia asociativa (porque la subálgebra generada por un elemento es asociativa).

Definición 2.9 *Si* A *es un álgebra alternativa se define su:*

- *Núcleo por:*

$$N(A) = \{x \in A \,:\, (x, A, A) = (A, x, A) = (A, A, x) = 0\}.$$

- *Centro:*

$$Z(A) = \{x \in N(A) \,:\, [x, A] = 0\}.$$

Observemos que $N(A)$ es un anillo asociativo y $Z(A)$ es un anillo conmutativo y asociativo. En general $N(A)$ conserva y expande las propiedades de A.

3 Algebra de Cayley-Dickson

Es un ejemplo de álgebra alternativa no asociativa. Aparece como solución final a un problema planteado en 1.800.

Observemos la identidad

$$(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (xa - yb)^2 + (xb + ya)^2$$

¿Qué pasará para la suma de n cuadrados?

Observemos que la identidad anterior aparece al tomar la norma en la relación siguiente:

$$(x + yi)(a + bi) = (xa - yb) + (xb + ya)i.$$

Euler y Lagrange consiguen la fórmula para 4 cuadrados. Degen para 8 cuadrados.

Hamilton afirmó que la fórmula se tiene si y solo si el álgebra es de división de dimensión n (finita) sobre $\mathbb{R}$.

Hurwitz demuestra en 1895 que las posibles dimensiones son: $1, 2, 4, 8$.

Sea A un álgebra unitaria y $* : A \to A$ una involución, es decir una aplicación lineal, tal que $* \circ * = id$ y $(ab)^* = b^* a^*$. Sea $\alpha \in A$, en $A \times A$ definimos un nuevo producto:

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1 + \alpha b_2 a_2^*, a_1 * b_2 + b_1 a_2).$$

Si $* = id$ lo que estamos diciendo es que ponemos un número i tal que $i^2 = \alpha$.

A este álgebra la notaremos por $A(\alpha)$. Observemos que es unitaria: $(1, 0)$ es el elemento unitario. Por otra parte observemos que si $v = (0, 1)$ entonces

$$A(\alpha) = A \oplus Av$$

donde $v^2 = \alpha$. Consideraremos la involución:

$$* : A(\alpha) \to A(\alpha)$$

definida por $*(x + yv) = x^* - yv$. A este proceso se le denomina Proceso de Cayley-Dickson.

Si partimos de F un cuerpo, $* = id$ y entonces $F(\alpha)$ es conmutativa, $F(\alpha, \beta)$ no es conmutativa y $F(\alpha, \beta, \gamma)$ no es asociativa, es alternativa. Si partimos de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}(-1) = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}(-1) = \mathbb{H}$ finalmente $\mathbb{H}(-1) = \mathbb{O}$.

Definición 3.1

- *Sea A un Φ-álgebra alternativa. Se dice que $B \subset A$ es un subálgebra si B con las operaciones inducidas por A es un álgebra. Para ello solo hace falta que las operaciones sean internas: si $b_1, b_2 \in B$ entonces $b_1 b_2 \in B$ y $b_1 + b_2 \in B$.*

- *Se dice que $I \subset A$ es un ideal si es un subálgebra y:*

$$ay, ya \in I$$

para todo $a \in A$ y para todo $y \in I$.

- *Se dice que $I \subset A$ es un ideal por la izquierda (respectivamente derecha) si es un subálgebra y:*
$$ay \in I, (ya \in I)$$
para todo $a \in A$ y para todo $y \in I$.

- *Se dice que A es simple si los únicos ideales de A son $\{0\}$, A y $A^2 \neq 0$.*

- *Se dice que A es prima si dados $I, J \lhd A$ no nulos se tiene que $IJ \neq 0$.*

- *Se dice que A es simiprima si para todo $I \lhd A$ $I \neq 0$ se tiene que $I^2 \neq 0$.*

- *Se dice que A es no degenerada si para todo $a \in A$ con $a \neq 0$ se tiene que $aAa \neq 0$.*

Observemos que si A es un álgebra asociativa entonces A es no degenerada si y solo si A es semiprima. Por otra parte si A es alternativa y no degenerada, entonces A es semiprima.

Si A es un álgebra asociativa y semiprima, entonces A es no degenerada (el recíproco es trivial).

Es decir, si $x \in A$ es tal que $xAx = 0$, ¿es cierto que $x = 0$? La respuesta es si:

Demostración: Si $xAx = 0$ entonces $A \times A \times A = 0$ por tanto $(A \times A)(A \times A) = 0$ de donde, $(A \times A)^2 = 0$. Ahora bien, por ser $A \times A$ un ideal generado por A, se tiene que $A \times A = 0$.

Consideramos
$$J = \{y \in A \,:\, AyA = 0\} \lhd A.$$
Se tiene que $(JJ)(JJ) \subset AJA = 0$ por lo que $J^2 = 0$ y también $J = 0$. Ahora bien, puesto que $x \in J$ se tiene que $x = 0$.

Definición 3.2 *Sea A un álgebra alternativa. Se define el ideal asociador:*

$$D(A) = \langle \{(x, y, z) \,:\, x, y, z \in A\} \rangle \lhd A$$

Denotaremos por $U(A)$ el mayor ideal contenido en $N(A)$.

Observemos que el cociente $A/D(A)$ es un álgebra asociativa.

Teorema 3.3 *Sea A un álgebra alternativa simple. Entonces A es asociativa simple o A es un algebra de Cayles-Dickson.*

Teorema 3.4 *Sea A un álgebra alternativa prima y no degenerada. Entonces A es asociativa o A es un anillo de Cayley-Dickson.*

$Z(A)$ es un DI; $Z(A)^{-1}Z(A)A = Z(A)^{-1}A$ es simple.

Teorema 3.5 *Sea A un álgebra asociativa no degenerada. Entonces existe una familia de ideales $\{I_\alpha\}$ de A tales que $\bigcap I_\alpha = 0$ y A/I_α es prima y no degenerada (es decir, fuertemente prima).*

Definición 3.6 *Se dice que un álgebra alternativa A es pura si $U(A) = 0$.*

Teorema 3.7 *Si A es no degenerada y puramente alternativa (es decir, pura y alternativa) entonces $N(A) = Z(A)$.*

Teorema 3.8 *Sea A un álgebra alternativa no degenerada tal que $((xy)z)x = (x,(yz))x$ para todo $x, y, z \in A$. Entonces A es asociativa.*

Demostración. A verifica que $(x, y, z)x = 0$, es alternativa y no degenerada. Y tenemos que demostrar que A es asociativa.

Existe una familia de ideales $\{I_\alpha\}$ tales que $\cap I_\alpha = 0$ y A/I_α es fuertemente prima.

Las álgebras A/I_α son asociativas y anillos de C.D., es más son álgebras de C.D. Estas álgebras de C.D verifican que $(x, y, z)x = 0$. Sabemos que las álgebras de C.D son simples y que $N(R) = Z(R)$, es decir es D.I.

Linealizando $(x, y, z)x = 0$ resulta que

$$\begin{aligned} 0 &= (a+b, y, z)(a+b) \\ &= (a, y, z)a + (a, y, z)b + (b, y, z)a + (b, y, z)b \\ &= 0 = (a, y, z)b + (b, y, z)a \end{aligned}$$

de donde $(a, y, z)b = -(b, y, z)a$. Ahora consideramos C_α el álgebra de C.D. tal que $(x, y, z)x = 0$ dado $\alpha \in Z(C_\alpha)$, observemos que

$$0 = (\alpha, y, z)b = -(b, y, z)\alpha$$

y esto implica que $\alpha(b, y, z) = 0$ para todo $b, y, z \in C_\alpha$. De donde

$$\langle\alpha\rangle\langle b, y, z)\rangle = 0$$

Es decir, $C_\alpha C_\alpha = 0$ y esto es una contradicción puesto que C_α es simple. Por tanto, un álgebra de C.D. no puede verificar que $(x, y, z)x = 0$, luego A está sumergida en un producto de álgebras asociativas, de donde A es asociativa.

Comentario 3.9 *Si tenemos un polinomio que no se anula en las álgebras de C.D. f y A es un álgebra alternativa no degenerada y f se anula en A entonces A es asociativa.*

Problema 3.10 *Si A es un algebra alternativa no degenerada sobre un cuerpo F y $dim_F N(A)$ es finita entonces $dim_F(A)$ es finito.*

4 Algebras de Jordan

Definición 4.1 *Sea Φ un anillo de escalares. Se dice que J es una Φ-álgebra de Jordan si J es un Φ módulo con un producto $\circ$ tal que*

- *$\circ$ es conmutativo.*
- *$\circ$ satisface la identidad de Jordan: $(a^2b)a = a^2(ba)$, es decir $(a^2, b, a) = 0$.*

Sea A un álgebra asociativa. Definimos en A un nuevo producto $x \circ y = (xy + yx)/2$, entonces $(A, \circ) = A^+$ es un álgebra de Jordan.

Comprobemos que $\circ$ es conmutativo. Por otra parte se tiene la identidad de Jordan:

$$((x \circ x) \circ y) \circ x = (x^2 \circ y) \circ x = \frac{1}{2}(x^2y + yx^2) \circ x = \frac{1}{4}(x^2yx + yx^3 + x^3y + xyx^2)$$

El otro miembro de la igualdad:

$$(x \circ x) \circ (y \circ x) = x^2 \circ (y \circ x) = \frac{1}{2}x^2 \circ (xy + yx) = \frac{1}{4}(x^3y + x^2yx + xyx^2 + yx^3).$$

Definición 4.2 *Se dice que un álgebra de Jordan es especial si es subálgebra de un álgebra A^+ con A asociativa. Si no es especial, se dice que es excepcional.*

Si A es alternativa entonces A^+ es de Jordan (porque las subálgebras generadas por dos elementos son asociativas).

Veamos algunos ejemplos de álgebras de Jordan:

1. Sea A un álgebra asociativa con involución $*$, definimos

   $$H(A, *) = \{a \in A \,:\, a = a^*\}$$

   es un álgebra de Jordan.

2. Sea V un espacio vectorial sobre F y $\langle , \rangle$ una forma bilinial simétrica sobre F, entonces $J = F \oplus V$ es un F-módulo, con el producto definido por:

   $$(\alpha, x) \circ (\beta, y) = (\alpha\beta + \langle x, y\rangle, \alpha y + \beta x)$$

   se tiene que J es un álgebra de Jordan y además se dice que es de tipo Clifford. Se puede encontrar un álgebra asociativa B tal que $J \leq B^+$.

3. Sea C un álgebra de C.D. $(C, *)$, entonces $J = H(M_3(C), *)$ se llama álgebra de Albert, no es especial. Si A es asociativa, consideramos A^+, se tiene que $J \leq A^+$, en general $[x, y] \notin J$.

Definición 4.3 *Dada un álgebra de Jordan J, definimos el operador cuadrático asociado a J como la aplicación $U_x : J \to J$*

$$U_x(y) = 2x \circ (x \circ y) - x^2 \circ y.$$

Observemos que si J es especial, entonces $J \subset A^+$, entonces $U_x(y) = xyx$.

Definición 4.4 *Definimos el producto triple como la linealización de U*

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}(U_{x+y}z - U_x a - U_y z)$$

Observemos que en el caso especial $\{x, y, z\} = \frac{1}{2}(xyz + zyx)$.

Si A es asociativa, consideramos A^+, se tiene que $J \subset J^+$. En general, dados $x, y \in J$, $[x, y] \notin J$ pero $\bigcup_{[x,y]} z \in J$. Ya que:

$$\begin{aligned} U_{[x,y]}z &= (xy - yx)z(xy - yx) = xyzxy - xyzyx - yxzxy + yxzyx \\ &= -UxU_y z - U_y U_x z + 4y \circ U_y \circ z - \frac{1}{4}(xzyxy + yxyzx) \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} U_x(y \circ z) &= \frac{1}{2}x(yz + zy)x \\ &= \frac{1}{2}(xyzx + xzyx) \end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} y \circ U_x(y \circ z) &= \frac{1}{4}(xyzxy + xzyxy + yxyzx) \\ &= \frac{-1}{2}\{x, z, U_y x\} \end{aligned}$$

De donde

$$U_{[x,y]}z = -U_x U_y z - U_y U_x z + 4y \circ U_x(y \circ z) - \frac{1}{2}\{x, z, U_y x\} \in J. \qquad (1)$$

Observemos que si J es un álgebra de Jordan, se verifica la identidad fundamental: $U_{U_x y} z = U_x U_y U_x z$.

Si J es especial: $J \subset A^+$ entonces

$$U_{U_{[x,y]}z}t = U_{[x,y]}U_zU_{[x,y]}t$$

La propiedad anterior no se verifica en un álgebra de Albert.

Si J no es especial se define $U_{[x,y]}z$ mediante la ecuación 1, pero no se verifica la identidad anterior.

Encontrar una identidad que se verifique en los especiales y no en los no especiales es muy difícil (en caso afirmativo se denomina s-identidad)[1].

Teorema 4.5 *Sea J un álgebra de Jordan, cualquier identidad en 3 variables en donde una de las variables tenga grado 1 y sea cierta en toda álgebra de Jordan especial, entonces es cierta en cualquier álgebra de Jordan.*

Teorema 4.6 *Cualquier álgebra de Jordan generada por dos elementos es especial. Es más, existe A asociativa involutiva tal que $J = H(A, *)$.*

Problema 4.7 *Sea I un ideal de un álgebra J. Demostrar que*

$$U_I I = \{\sum_i U_{y_i} y_i' \,;\, y, y_i' \in I\}$$

es un ideal.

1. En primer lugar observemos que $U_I I$ es un submódulo.

2. Dado $y \in U_I I$, $x \in J$, veamos que $x \circ y \in U_I I$, como es lineal respecto de la suma basta ver que

   $$x \circ U_y y' \in U_I I$$

   para todo $y, y' \in I$ y para todo $x \in J$. Ahora bien

   $$\begin{aligned} x \circ U_y y' &= x \circ yy'y \\ &= \frac{1}{2}(xyy'y + yy'yx) \\ &= \{x \circ y, y', y\} - \frac{1}{2}(yxy'y + yy'xy) \\ &= \{x \circ y, y', y\} - U_y(x \circ y) \in U_I I \end{aligned}$$

   Tenemos $x \circ U_y y' = \{x \circ y, y', y\} - U_y(x \circ y)$ una identidad en las condiciones del Teorema 4.6 que por tanto es válida en toda álgebra de Jordan, por tanto $U_I I$ es un ideal.

[1] No hay que asustarse la hora de comprobar identidades, en la práctica se trabaja en asociativo y luego se busca en un libro lo que se obtiene para el caso no asociativo.

5 Pares de Jordan

Definición 5.1 *Sea Φ un anillo de escalares. Se define un par de Jordan sobre Φ como un par de Φ-módulos $V = (V^+, V^-)$ con un par de aplicaciones cuadráticas*

$$\begin{aligned} Q^\sigma : V^\sigma &\rightarrow Hom(V^{-\sigma}, V^\sigma) \\ x &\rightarrow Q_x^\sigma \end{aligned}$$

donde $\sigma \in \{+, -\}$. El homomorfismo $Q_x^\sigma : V^{-\sigma} \rightarrow V^\sigma$ viene definido por

$$Q_x^\sigma(y) = Q_x y.$$

Veamos algunos ejemplos

1. Si J es una Φ-álgebra de Jordan, $V = (J^+, J^-)$ siendo $J^+ = J^- = J$. Si $x \in J^+$ entonces definimos $Q_{x^+}y^- = U_x y$. En este caso V es un par de Jordan.

2. Si R es un anillo asociativo entonces (R, R) es un par de Jordan. Se define $Q_x y = xyx$; $\{x, y, z\}\frac{1}{2}(xyz + zyx)$. A (R, R) se le llama par asociativo.

3. ¿Porqué se consideran las estructuras de pares? Observemos que en el conjunto $M_n(\mathbb{R})$ podemos multiplicar, ya que es un anillo. Sin embargo no podemos multiplicar en el conjunto $M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Ahora bien, si $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ si tiene sentido el siguiente producto:

   $$Q_A B = AB^t A$$

   Se define $\{A, B, C\} = \frac{1}{2}(AB^tC + CB^tA)$. De esta manera el conjunto $V = (M_{m\times n}(\mathbb{K}), M_{n\times m}(\mathbb{K}))$ es un par de Jordan.

Definición 5.2 *Sea $V = (V^+, V^-)$ un par de Jordan. Se dirá que W es un subespacio de V si las operaciones on internas en W*

- *W^σ es un submódulo de V^σ.*
- *Dados $x \in W^\sigma$, $y \in W^{-\sigma}$, $Q_x y \in W^\sigma, Q_y x \in W^{-\sigma}$.*

Definición 5.3 *Sea $V = (V^+, V^-)$ un par de Jordan. Se dirá que W es un ideal de V si*

- *W es un submódulo de V^σ.*

- *Dados $y \in W^\sigma$, $x, x' \in V^{-\sigma}$, $x'' \in V^\sigma$ se tiene que*

$$\{y, x, x''\} \in W^\sigma \quad \{x, y, x'\} \in W^{-\sigma}.$$

Observemos que $\{x, y, z\} = \{z, y, x\}$.

Definición 5.4 *Dado un par de Jordan $V = (V^+, V^-)$ y $I = (I^+, I^-) \lhd V$, se define el cociente $V/I = (V^+/I^+, V^-/I^-)$, siendo $Q_{\bar{x}}\bar{x}' = \overline{Q_x x'}$.*

Definición 5.5 *Sean V, W pares de Jordan. Un homomorfismo $f : V \to W$ es un par de aplicaciones $f = (f^+, f^-)$ donde $f^+ : V^+ \to W^+$ y $f^- : V^- \to W^-$ son homomorfismos de módulos y tales que*

$$f^\sigma\{x, y, z\} = \{f^\sigma x, f^{-\sigma} y, f^\sigma z\}.$$

Observemos que $Ker(f) \lhd V$ y que $Im(f) \leq W$.

Veamos un ejemplo. Sea V un par de Jordan e I un ideal de V. Entonces el conjunto $I^3 = (\langle\{I^+, I^-, I^+\}\rangle, \langle\{I^-, I^+, I^-\}\rangle)$ no tiene porqué ser un ideal.

Para ello tendríamos que ver esto:

$$\begin{aligned}
\{a, b, \{y_1, y_2, y_3\}\} &\in I^3 \\
\{a, \{y_1, y_2, y_3\}, b\} &\in I^3
\end{aligned}$$

Ahora bien, observemos que

$$\begin{aligned}
\{a, b, \{x, y, z\}\} &= \frac{1}{4}(ab(xyz + zyx) + (xyz + zyx)ba) \\
&= \frac{1}{4}(abxyz + abzyx + xyzba + zyxba) \\
&= \{\{a, b, x\}, y, z\} - \frac{1}{4}xbayz - \frac{1}{4}zyabx + \frac{1}{4}abzyx + \frac{1}{4}xyzba \\
&= \{\{a, b, x\}, y, z\} - \frac{1}{4}xbayz - \frac{1}{4}zyabx \\
&+ \{\{a, b, z\}, y, x\} - \frac{1}{4}zbayx - \frac{1}{4}xyabz \\
&= \{\{a, b, x\}, y, z\} + \{\{a, b, z\}, y, x\} - \{x, \{b, a, y\}, z\}
\end{aligned}$$

Por tanto, $\{a, b, \{x, y, z\}\} \in I^3$. Además se tiene lo que se denomina identidad JP14:

$$\{a, b, \{x, y, z\}\} = \{\{a, b, x\}, y, z\} + \{\{a, b, z\}, y, x\} - \{x, \{b, a, y\}, z\}.$$

En general, $\{a, \{x, y, z\}, b\} \notin I^3$. Se ha demostrado que existe un ideal contenido en I^3.

Definición 5.6 *Sea V un par de Jordan.*

- *Se dice que V es no degenerado si dado $a \in V^\sigma$ tal que $Q_a V^{-\sigma} = 0$ entonces $a = 0$.*
- *Se dice que V es semiprimo si dado I un ideal de V no nulo, $I^3 \neq 0$.*
- *Se dice que V es primo si dados I, J ideales no nulos de V se tiene que $Q_I J \neq 0$.*

Teorema 5.7 *Si V es semiprimo (respectivamente primo) e $I \lhd V$ no nulo, entonces I es semiprimo (resp. primo).*

Observemos que el teorema anterior en el caso asociativo es fácil de probar ya que si R es asociativo semiprimo y $I \lhd R$ con $I \neq 0$, si $J \lhd I$, $IJI \lhd R$ de donde $IJI \subset I$. Sin embargo en Jordan no todo ideal de I contiene un ideal de R.

6 Sistemas triples de Jordan

Definición 6.1 *Un sistema triple de Jordan T es un Φ-módulo con una aplicación cuadrática*

$$\begin{aligned} P : T &\rightarrow End(T,T) \\ x &\rightarrow P_x : T \rightarrow T \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} L_{x,y} P_x &= P_x L_{y,x} \\ L_{P_x y, y} &= L_{x, P_y x} \\ P_{P_{x,y}} &= P_x P_y P_x \end{aligned}$$

donde $L_{x,y} = \frac{1}{2}(P_{x+y} - P_x - P_y) = \{x, y, -\}$ es una forma trilineal.

Observemos que si T es un triple de Jordan entonces (T, T) es un par de Jordan. Veamos que hay una forma de relacionar las estructuras de Álgebra, Par y triple de Jordan.

- **De álgebra a triple.** Dado un álgebra de Jordan J podemos considerar $T(J)$, sólo nos tenemos que olvidar del producto y tomar $P = U$:

$$\begin{aligned} P : J &\rightarrow End(J,J) \\ x &\rightarrow U_x \end{aligned}$$

- **De triple a par.** Si T es un sistema triple de Jordan podemos construir $V(T) = (T, T)$, tomamos como $Q^\sigma = P$, con $\sigma \in \{+, -\}$.
- **De par a triple.** Si $V = (V^+, V^-)$ es un par de Jordan, podemos formar $T(V) = V^+ \oplus V^-$ y podemos definir

$$\begin{array}{rcl} P : T(V) & \rightarrow & End(T(V)) \\ x + x' & \rightarrow & P_{x+x'} : T(V) \rightarrow T(V). \end{array}$$

donde $P_{x+x'}(y + y') = Q_x^+ + Q_y^- x$. Se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{rcl} T \rightarrow & (T, T) & \rightarrow T \oplus T \\ Triple \rightarrow & Par & \rightarrow Triple. \end{array}$$

Todo funciona de forma funcional. Además, las propiedades se "traspasan bien". En el siguiente diagrama se ilustra cómo se traspasan dichas propiedades.

	Algebra de Jordan J	Sistemas Triples $T(J)$ T	Pares $V(T)$ V	Sistemas Triples $T(V)$
No degenerada	$\leftrightarrows$	$\leftrightarrows$	$\leftrightarrows$	
Semiprimo	$\leftrightarrows$	$\leftrightarrows$	$\leftrightarrows$	
Primo	$\leftrightarrows$	$\longleftarrow$	$\leftrightarrows$	
simple	$\leftrightarrows$	$\longleftarrow$	$\leftrightarrows$	
Fuertemente pura	$\leftrightarrows$	$\longleftarrow$	$\leftrightarrows$	

7 Algebras locales

Sea V un par de Jordan y sea $a \in V$. Vamos a poder construir un álgebra V^a. $V = (V^+, V^-)$, con $a \in V^-$. Si $x, y \in V^+$ definimos

$$x \circ y = \frac{1}{2}\{x, a, y\} = Q_{x+y}a - Q_x a - Q_y a$$

En este caso $x^2 = \frac{1}{2}\{x, a, x\} = Q_x a$. Se tiene que $(V^+, \circ)$ es un álgebra de Jordan.

$$\begin{aligned} U_x^a y &= 2x \circ (x \circ y) - x^2 \circ y \\ &= 2\{x, a, \{x, a, y\}\} - \{Q_x a, a, y\} \\ &= \frac{1}{2}(xaxay + xayax + yaxax + xayax) - \frac{1}{2}xaxay - \frac{1}{2}yaxax \\ &= \frac{1}{2}(xayax + xayax) = Q_x Q_a y \end{aligned}$$

de donde tenemos que $U_x^a y = \frac{1}{2}Q_x Q_a y$.

Observemos que

$$x \circ y = \frac{1}{2}\{x, a, y\} = \frac{1}{2}\{y, a, x\} = y \circ x$$

Por otra parte veamos que $(x^2 \circ y) \circ x = x^2 \circ (y \circ x)$.

$$\begin{aligned}(x^2 \circ y) \circ x &= \{\{Q_x a, a, y\}, a, x\} \\ &= \frac{1}{4}(xaxayax + yaxaxax + xayaxax + xaxaxay) \\ &= \{Q_x a, a, \{x, a, y\}\} = x^2 \circ (y \circ x)\end{aligned}$$

Al álgebra V^a se le denomina Álgebra Homótopa de V en a. Este álgebra tiene por ideal

$$Ker(a) = \{x \in V^+ \,:\, Q_a x = 0\} \lhd V^a.$$

Se define el álgebra local de V en a como $V^a/Ker(a) = V_a$.

Vemaos que si V es no degenerada entonces V_a es no degenerada.

Para ello sea $x \in V^\sigma$ tal que $U_{\bar{x}}^a V^\sigma = \bar{0}$ y tenemos que probar que $\bar{x} = \bar{0}$. Pero observemos que

$$U_{\bar{x}}^a V^\sigma = U_{\bar{x}} U_a V^\sigma = \bar{0}$$

lo cual implica que $0 = U_a U_x U_a V^\sigma = U_{U_a x} V^\sigma$. Ahora bien por ser V no degenerado tenemos que $U_a x = 0$.

Ahora bien

$$U_{U_a U_x a} = U_a U_{U_x a} U_a = U_a U_x U_a U_x U_a = 0$$

de donde $0 = U_{U_a x} = U_a U_x U_a$, por ser V no degenerada se tiene que $U_a U_x a = 0$ lo cual implica de nuevo que $U_a U_x a = 0$.

Por tanto puesto que $U_a x = 0$ y $U_a U_x a = 0$ se tiene que $x \in Ker(a)$ por tanto $\bar{x} = \bar{0}$.

Así pues V_a es no degenerada.

Teorema 7.1 *Sea V un par de Jordan*

- *V es no degenerada si y solo si todos los locales son no nulos.*
- *V es semiprimo (resp. primo) si y sólo si V_a es semiprimo (resp. primo) para todo $a \in V$.*
- *Si V es simple entonces V_a es simple.*
- *Si todos los locales son simples entonces V^3 es simple (T. Cortes & J. Anquela).*

Definición 7.2 *Sea V un par de Jordan. Se define una derivación en V como un par de aplicaciones lineales:*

$$d^+ : V^+ \to V^+ \qquad d^- : V^- \to V^-$$

tales que

$$d^\sigma\{x, y, z\} = \{d^\sigma x, y, z\} + \{x, d^{-\sigma} y, z\} + \{x, y, d^\sigma z\}.$$

Veamos un ejemplo. Sea $x \in V^\sigma$, e $y \in V^{-\sigma}$, el par $(D_{x,y}, -D_{y,x})$ es una derivación.

$$\{x, y, \{a, b, c\}\} = \{\{x, y, a\}, b, c\} + \{a, -\{y, x, b\}, c\} + \{a, b, \{x, y, c\}\}$$

La identidad anterior es la identidad Jp14. A estas derivaciones se les llama derivaciones internas.

8 Álgebra de Lie

Definición 8.1 *Sea Φ un anillo de escalares (supondremos que $\frac{1}{2} \in \Phi$). Se dice que L es una Φ algebra de Lie si es un Φ módulo con un producto $[,]$ verificando*

- $[x, x] = 0$ *para todo* $x \in L$.
- $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$ *(identidad de Jacobi).*

Si la característica de Φ es distinta de 2 entonces $[x, y] = -[y, x]$, es decir se tiene la propiedad anticonmutativa.

Veamos un ejemplo. Sea A un álgebra asociativa, el par $(A, [,])$ es un álgebra de Lie con el producto

$$[x, y] = xy - yx.$$

Toda álgebra de Lie es especial, es decir, si L es un álgebra de Lie, existe A álgebra asociativa tal que L es un subálgebra de A.

Definición 8.2 *Sea L un álgebra de Lie. Se dice que $f : L \to L$ es una derivación si*

- *f es un homomorfismo de módulos.*
- $f[x, y] = [f(x), y] + [x, f(y)]$

Notemos que dado $x \in L$, la aplicación $ad_x : L \to L$ definida por $ad_x(y) = [x, y]$ es una derivación (de hecho es una derivación interna).

Definiremos $Der(L)$ el conjunto de todas las derivaciones de L. Y por $IDer(L)$ el conjunto de todas las derivaciones internas.

Observemos que $Der(L) \subset End(L)$. $Der(L)$ no es un subálgebra asociativa, pero si es un subálgebra de $End(L)^-$.

- La suma de derivaciones es una derivación.
-

$$\begin{array}{rcl} [f,g][x,y] & = & fg[x,y] - gf[x,y] \\ & = & f([gx,y] + [x,gy]) - g([fx,y] + [x,fy]) \\ & = & [fgx,y] + [gx,fy] + [fx,gy] + [x,fgy] \\ & - & [gfx,y] - [fx,gy] - [gx,fy] - [x,gfy] \\ & = & [[f,g]x,y] + [x,[f,g]y] \end{array}$$

  es decir, $[f, g]$ es una derivación.

Definición 8.3 *Sea L un álgebra de Lie. Se define el centro de L como*

$$Z(L) = \{x \in L \,:\, [x,y] = 0 \;\forall y \in L\} = \{x \in L \,:\, ad_x = 0\}.$$

Teorema 8.4 *Sea L un álgebra de Lie. Entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} ad : L & \to & Der(L)^- \\ x & \to & ad_x \end{array}$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie. Es más, $Ker(ad) = Z(L)$. Por tanto si $Z(L) = 0$ entonces L es especial.

Es un ejercicio simple comprobar que $Im(ad) = IDer(L) \lhd Der(L)$.

Definición 8.5 *Se dice que un álgebra de Lie L es $\mathbb{Z}$-graduada si $L = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L_n$ donde L_n es un submódulo de L satisfaciendo que $[L_n, L_m] \subset L_{n+m}$.*

Adicionalmente se dice que la graduación es finita si $L = \bigoplus_{i=-n}^{n} L_i$.

Teorema 8.6 *Dada un álgebra de Lie $L = \bigoplus_{i=-n}^{n} L_i$, se tiene que (L_{-n}, L_n) es un par de Jordan.*

Las álgebras de Lie tres graduadas fueron estudiadas por T. Cortes, J. Anquela y E. García. Las 5-graduadas por Brunce Allison.

Definición 8.7 *Se dice que un álgebra de Lie es* $(2n+1)$*-graduada si* $L = \bigoplus_{i=-n}^{n} L_i$*, con* L_i *submódulos de* L *tales que* $[L_1, L_j] \subset L_{i+j}$ *con* $L_{i+j} = 0$ *si* $|i+j| > n$

Teorema 8.8 *Si* $L \bigoplus_{i=-n}^{n} L_i$ *es un álgebra de Lie* $(2n+1)$*-graduada entonces* (L_{-n}, L_n) *es un par de Jordan.*

Demostración. Definimos $\{x, y, z\} = [[x, y], z]$ donde $x \in L_{\sigma n}$, $y \in L_{-\sigma n}$ y $z \in L_{\sigma n}$.

Definimos $Q_x y = \frac{1}{2}\{x, y, x\}$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\{x, y, z\} &= [[x, \bar{y}], z] \\
&= [[x, z], \bar{y}] + [x, [\bar{y}, z]] \\
&= [x, [\bar{y}, z]] \\
&= -[[\bar{y}, z], x] \\
&= [[z, \bar{y}], x] \\
&= \{z, y, x\}
\end{aligned}$$

A partir de la la identidad

$$\{x, y, \{a, b, c\}\} = \{\{x, y, a\}, b, c\} - \{a, \{y, x, b\}, c\} + \{a, b, \{x, y, c\}\} \tag{2}$$

se prueban las identidades JP1, JP2 y JP3 usando el resultado 2.2 de la página 15 del libro de Loos.

Veamos que la identidad JP14, es decir la igualdad 2 es cierta.

$$\begin{aligned}
\{x, \bar{y}, \{a, \bar{b}, c\}\} &= [[x, \bar{y}], [[a, \bar{b}], c]] \\
&= [[[x, \bar{y}], [a, \bar{b}], c] + [[a, \bar{b}], [[x, \bar{y}], c]] \\
&= [[[x, \bar{y}], a], \bar{b}], c] + [[a, [[x, \bar{y}], \bar{b}], c] + [[a, \bar{b}], [x, \bar{y}], c]] \\
&= \{\{x, y, a\}, b, c\} - \{a, \{y, x, b\}, c\} + \{a, \bar{b}, \{x, y, c\}\}
\end{aligned}$$

Así pues, se verifica la propiedad JP14, por el Teorema del libro de Loos se tiene que (L_{-n}, L_n) es un par de Jordan, y la prueba está concluida.■

Tits, Kantor y Koecher, dado un par de Jordan, construyeron un álgebra de Lie. Si V es un par de Jordan, denotaremos por $TKK(V)$ a esta álgebra.

Sea $V = (V^+, V^-)$ un par de Jordan, $TKK(V) = V^+ \oplus \underbrace{\quad}\oplus V^-$. Al multiplicar 3 elementos como quiero mantener mi par tengo que obtener $\{x, \bar{y}, z\} = [[x, \bar{y}, z]$. Además, JP14 nos dice que la aplicación $\{x, \bar{y}, -\}$ es una derivación.

Consideramos $TKK(V) = V^+ \oplus IDer(V) \oplus V^-$. Definimos el producto:

$$\begin{aligned}
& [(v^+ + (f^+, f^-) + v^-), (w^+ + (g^+, g^-) + w^-)] \\
= \;& (-g^+(v^+) + f^+(w^+), d_{v^+,w^-}, -d_{w^-,v^+}) \\
+ \;& [(f^+, f^-), (g^+, g^-)] - (d_{v^-,w^+}, -d_{w^+,v^-}), f^-(w^-) - g^-(v^-))
\end{aligned}$$

Esto define una estructura de álgebra de Lie.

Teorema 8.9 *Sea V un par de Jordan y $TKK(V)$ su álgebra de Lie. Entonces*

i) *(L_{-1}, L_1) es isomorfo a V.*

ii) *Si $x_0 \in L_0$, $[x_0, L_1 \oplus L_{-1}] = 0$ entonces $x_0 = 0$.*

iii) *$[L_{-1}, L_1] = L_0$.*

iv) *Un álgebra de Lie, $L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$ con estas propiedades es la TKK de (L_{-1}, L_1).*

Definición 8.10 **1)** *Se dice que un álgebra de Lie L es no degenerada si dado $x \in L$, $[x, [x, L]] = ad_x^2 = 0$ implica que $x = 0$.*

2) *Se dice que L es semiprima si dado $0 \neq L \lhd L$ no nulos se tiene que $[I, J] \neq 0$.*

3) *Se dice que L es simple si $[L, L] \neq 0$ y sus únicos ideales son $\{0\}$ y L.*

Lema 8.11 *Sea V un par de Jordan y $L = TKK(V)$. Sea $I \lhd TKK(V)$ entonces*

i) *$(\pi_{-1}(I), \pi_1(I)) \lhd V$, $(I \cap V^+, I \cap V^-) \lhd V$.*

ii) *$\pi(I)^3 \subset I \cap V \subset \pi(I)$.*

(Recordemos que $\pi^3(I) = (\{\pi(I), \pi(I), \pi(I)\}, \{\pi(I), \pi(I), \pi(I)\}$).

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned}
\{\pi_1(y), \bar{a}, b\} &= [[\pi_1(y), \bar{a}], b] \\
&= \pi_1[[\pi_1(y), \bar{a}], b] \\
&= \pi_1[[y, \bar{a}], b] \subset \pi_1(I)
\end{aligned}$$

Razonando así llegamos a que $(\pi_{-1}(I), \pi_1(I)) \lhd V$. Análogamente se tiene que $(I \cap V^+, I \cap V^-) \lhd V$.

Para probar ii) veamos observemos que la contención $I \cap V \subset \pi(I)$ es trivial. Basta probar que $\pi(I)^3 \subset I \cap V$.

$$\begin{aligned}
\{\pi_1(y), \pi_{-1}(y'), \pi_1(y'')\} &= [[\pi_1(y), \pi_{-1}(y')], \pi_1(y'')] \\
&= \pi_1[[\pi_1(y), \pi_{-1}(y')], \pi_1(y'')] \\
&= \pi_1[[\pi_1(y), y'], \pi_1(y'')] \in \pi_1(I)
\end{aligned}$$

Y la prueba está terminada.■

Teorema 8.12 *Sea V un par de Jordan, $L = TKK(V)$, entonces si V es simiprimo entonces $TKK(V)$ es semiprima. Si V es semiprimo entonces*

1) *V es primo si y sólo si $TKK(V)$ es prima.*

2) *V es simple si y sólo si $TKK(V)$ es simple*

Demostración. Supongamos que V es semiprimo y sea $0 \neq I \lhd L$ tal que $[I, I] = 0$.

Por el lema anterior $\pi(I) \lhd V$. Si $\pi(I) = 0$ entonces $I \subset L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$ y esto implica uqe $I \subset L_0$. Ahora bien

$$[I, L_{-1}] \subset I \cap L_{-1} \subset \pi_{-1}(I) = 0$$

y

$$[I, L_1] \subset I \cap L_1 \subset \pi_1(I) = 0$$

y esto implica que $I = 0$, contradicción.

Luego $\pi(I) \neq 0$, como V es semiprimo se tiene que $\pi(I)^3 \neq 0$, pero $\pi(I)^3 \subset I \cap V$ luego $I \cap V \neq 0$. Además

$$(I \cap V)^3 = \{I \cap V_+, I \cap V_-, I \cap V_+\} \subset [[I, I], I]$$

y esto es una contradicción.

Supongamos que V es primo, si $I.J \lhd L$ son no nulos, entonces si $\pi(I) \neq 0$, $\pi(J) \neq 0$ entonces $I \cap V \neq 0$ y $J \cap V \neq 0$. Por tanto

$$0 \neq \{I \cap V_+, J \cap V_-, I \cap V_+\} \subset [[I, J], J]$$

lo cual implica que $[I, J] \neq 0$.

La implicación contraria es elemental y se deja al lector como ejercicio.

Ahora supongamos que V es simple, $0 \neq I \lhd TKK(V)$, entonces $0 \neq I \cap V$ lo que implica que $I \cap V = V$. Ahora bien $V_+, V_- \subset I$ lo cual implica que $[V_+, V_-] \subset I$ y esto implica que $TKK(V) \subset I$, así pues se tiene que $I = TKK(V)$.

Ahora supongamos que L es simple. Sea (I^+, I^-) ideal de V, entonces $I^+ + ([I^+, V^-] + [I^-, V^+]) + I^- \lhd L$. Ahora bien $[I^+, L_1] = 0$ y

$$[I^+, L_0] = [I^+, [V^-, V^+]] = \{I^+, V^-, V^+\} \subset I^+$$

Pero $[I^+, V^-] \subset id_L(I)$ luego se tiene

$$([I^+, V^-], V^+] = \{I^+, V^-, V^+\} \subset I^+$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} [[I^+, V^-], L_0] &= [[I^+, V^-], [V^+, V^-]] \\ &= [[I^+, V^-], V^+]V^- + [V^+, [[I^+, V^-], V^-]] \end{aligned}$$

y esto concluye la demostración.■

Teorema 8.13 *Sea V un par de Jordan y $L = TKK(V)$. Entonces V es no degenerada si y sólo si L es no degenerada.*

Demostración. Supongamos que L es no degenerada. Sea $x \in V$ tal que $Q_x V = 0$, se tiene $\{x, V^-, x\} = 0$ por tanto

$$0 = \{x, V^-, x\} = [[x, V^-], x] = -[x, [x, V^-]] = [x, [x, L]]$$

y esto implica que $x = 0$.

Supongamos que V es no degenerada. Sea $x \in L$ tal que $[x, [x, L]] = 0$, es decir, $ad_x^2 = 0$.

$ad_x ad_x ad_x = 0$ luego $[x, [x, a]] = 0$, recordemos $ad : L \to IDer(L)$. Tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= ad_{[x,[x,a]]]} \\ &= [ad_x, [ad_x, ad_x]] \\ &= [X, [X, A]] \\ &= X(SA - AX) - (XA - AX)X = X^2A + AX^2 - 2XAX \\ &= -2XAX \end{aligned}$$

lo cual implica que $XAX = 0$. Ahora bien, $x = x_{-1} + x_0 + x_1$ de donde

$$\begin{aligned} 0 &= [x_{-1} + x_0 + x_1, [x_{-1} + x_0 + x_1, L_1]] \\ &= [x_{-1}, [x_{-1}, L_1]] + (\quad) + (\quad) \end{aligned}$$

de donde se tiene que $[x_{-1}, [x_{-1}, L_1]] = 0$ y por tanto $-\{x_{-1}, V^+, x_{-1}\} = 0$ y esto implica que $x_{-1} = 0$. Análogamente se tiene que $[x_1, [x_1, L_{-1}]] = 0$ y se deduce que $x_1 = 0$. Por tanto $x = x_0 \in L_0$.

En particular,

$$0 = [x_0, [x_0, [L_1, L_{-1}]]] = [[x_0, [x_0, L_1]], L_{-1}] + 2[[x_0, L_1], [x_0, L_{-1}]] + [L_1, [x_0, [x_0, L_{-1}]]]$$

de donde obtenemos que $[[x_0, L_1], [x_0, L_{-1}]] = 0$. Si vemos que $[x_0, L_1] = [x_0, L_{-1}] = 0$ entonces habremos acabado, ya que $x_0 = 0$. En primer lugar observemos que $[x_0, x_1] \in V_1$ y tenemos que

$$\begin{aligned}
\{[x_0, x_1], y, [x_0, x_1]\} &= [[[x_0, x_1], y][x_0, x_1]] \\
&= [[[x_0, y]x_1], [x_0, x_1]] + [[x_0, [x_1, y]], [x_0, x_1]] \\
&= [x_0, [[x_1, y], [x_0, x_1]]] \\
&= ad_{x_0} ad_{[x,y]} ad_{x_0}(x_1) = 0
\end{aligned}$$

de donde $x_0 = 0$ y la prueba está concluida. ■

9 Zócalo en álgebras asociativas y de Jordan

Podemos considerar anillos de la forma $End_\Delta V$, V un espacio vectorial de dimensión cualquiera. El conjunto $End_\Delta V$ no es simple y no satisface la c.c.d para ideales a la izquierda (resp. derecha). Consideramos

$$ZOC(R) = \{f \in End_\Delta V \ : \ ran(f) < \infty\}$$

que es un ideal simple de $End_\Delta V$.

El conjunto $ZOC(R)$ verifica la c.c.d. de sus ideales principales.

Dado un anillo simiprimo R se define el zócalo de R como $ZOC(R) = \sum I_\alpha$ con I_α ideal a la izquierda minimal de R.

Proposición 9.1 **1.** *$ZOC(R)$ es un ideal, $ZOC(R) = \oplus A_\alpha$, donde A_α es un anillo simple que coincide con su zócalo.*

2. *Verifica la c.c.d. de los ideales a la izquierda minimales.*

3. *Las componentes simples son anillos de operadores de rango finito.*

4. *Si $ZOC(R)$ es unitario, se tiene que $ZOC(R)$ es artiniano.*

Si R es simple, $ZOC(R) = R$, I ideal a la izquiera minimal entonces existe $y \in I$ tal que $I = R_y$.

Se puede escribir $I = R_e$ con $e^2 = e$. En este caso, eR es un ideal a la derecha minimal y eRe es un anillo de división.

$$\begin{aligned}
eR \times Re &\to eRe \\
(ex, ye) &\to exye
\end{aligned}$$

Se puede probar que $R \cong$ a un subanillo de $End_{eRe}(Re)$ de rango finito.

¿Qué ocurre en Jordan?

Definición 9.2 *Sea J un álgebra de Jordan.Se dice que $I \subset J$ es un ideal interno de J si I es un Φ-módulo de J y para todo $x \in I$ se tiene que $U_xJ \subset I$.*

Observemos que si $J = R^+$ entonces $I \lhd_{in} J$ si y sólo si $xRx \subset I$ para todo $x \in J$.

Por otra parte, si $x \in J$ y $U_xJ \lhd_{in} J$ son ideales principales; $U_xy \in U_xJ$, además $U_{U_xy}J = U_xU_yU_xJ \subset U_xJ$.

Definición 9.3 *Un ideal interno $I \lhd_{in} J$ se dice minimal si para todo $K \lhd_{in} J$ se tiene $=\subset K \subset I$ implica que $K = 0$ o $K = I$.*

Definición 9.4 *SE define el zócalo de un álgebra de Jordan no degenerada J como $J = \sum I_\alpha$, donde I_α son ideales internos minimales de J.*

Teorema 9.5 *Sea J no degenerada se tiene que $ZOC(J) \lhd J$.*

Observemos que $ZOC(J) = \bigoplus A_\alpha$, cada A_α es simple y coincide con su zócalo. $ZOC(J)$ verifica la c.c.d. ideales internos principales, $1 \in ZOC(J)$ implica que $ZOC(J) = J$, artiniano.

Veamos una idea de porqué $ZOC(J) \lhd J$.

Observemos que $ZOC(J) = \sum I_\alpha$ con I_α ideales internos minimales. Si $x \in J, y \in I_\alpha$ ¿ $x \circ y \in \sum I_\alpha$?.

Por ser I_α minimal se tiene que $U_xI_\alpha = 0$ o es minimal.

Se dice que $T : J \to J$ es estructural si T es lineal y $U_{T(x)}y = TU_xT(y)$. Observemos que U_x es estructural.

Lema 9.6 *Si T es estructural e $I \lhd_{in} J$ se tiene que $T(I) \lhd_{in} J$.*

Si I es minimal, entonces $T(I) = 0$ o es minimal. Si $T(x) \in T(I)$ entonces

$$U_{T(x)}J = TU_xT(J) \subset TU_xJ \subset T(I)$$

luego implica que es interno.

I es minimal, $x \in I$ y $T(I) \neq 0$, se tiene

$$U_{T(x)}J = TU_xT(J) \subset T(I).$$

de aquí se deduce que $T(I)$ es minimal.

10 Noción de zócalo en álgebras de Lie 3 graduadas.

Lema 10.1 *Sea V un par de Jordan y sea $(I^+, I^-) \lhd V$ tal que $I^3 = I$, entonces*

$$I^+ \oplus [I^+, I^-] \oplus I^- \lhd TKK(V)$$

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned} & [[y^+, y^-], x_1 + x_0 + x_{-1}] = \\ = \ & [[y^+, y^-], x_1] + [[y^+, y^-, x_0] + [[y^+, y^-], x_{-1}] \end{aligned}$$

El primer y el tercer término pertenecen respectivamente a I^+ y a I^-, veamos el término del medio.

Observemos que $y = \sum([[y_i, y_i'], y_i''])$ y tenemos que

$$\begin{aligned} [[y^+, [[\bar{y}_i, y_i'], \bar{y}_i'']], x_0] &= [[y^+, x_0], [[\bar{y}_i, y_i'], \bar{y}_i']] \\ &+ [y^+, [[[y, y_i'], y_i'], y_i''] \\ &= [[[[y^+, x_0], \bar{y}_i'] \bar{y}_i'], \bar{y}_i''] + [[[\bar{y}_i, [[y', x_0], y_i']], \bar{y}_i'']] \\ &+ [[[\bar{y}_i, y_i'], [[y', x_0], \bar{y}_i'']]] \\ &+ [y, [[y_i, x_0], \bar{y}_i']] + [y[[\bar{y}_i, [y_i', x_0]], \bar{y}_i'']] \\ &+ [y, [[[y_i, y_i'], [y_i'', x_0]]] \in [I, I] \end{aligned}$$

y esto concluye la demostración. ■

Teorema 10.2 *Sea $L = L_1 \oplus L_0 \oplus L_{-1}$ tres graduada. SEan $V = (L_1, L_{-1})$, $ZOC(V) = (S^+, S^-)$. Entonces se tiene*

$$S^+ \oplus [S^+, S^-] \oplus S^- \lhd L.$$

Al ideal anterior se le denominará zócalo de L. Definimos el zócalo de L como la subálgebra generada por el zócalo de V.

Teorema 10.3 *Sea $L = L_1 \oplus L_0 \oplus L_{-1}$ tres graduada no degenerada. Entonces*

$$ZOC(L) = \bigoplus S_i quad S_i = TKK(V_i)$$

donde V_i es un par de Jordan y S_i álgebra de Lie simple 3-graduada que coinciden con su zócalo.

Demostración. Tenemos $V = ZOC(L_1, L_{-1})$ de donde $V_i = \oplus(V_i^+, V_{-i}^-)$ con (V_i^+, V_i^-) un par de Jordan simple que coincide con su zócalo ($\{V_i, V_j, L_i\} = 0$).■

Sean V, W pares de Jordan no degenerados que coinciden con su zócalo. Podemos considerar $TKK(V \oplus W)$, tenemos

$$L = TKK(V \oplus W) = W^+ \oplus W^+ \oplus IDer(V \oplus W) \oplus V^- \oplus W^-.$$

observemos que $IDer(V \oplus W) = IDer(V) \oplus IDer(W)$.

Tenemos varias graduaciones de L por ejemplo

$$V^+ \oplus (TKK(W) \oplus IDer(V)) \oplus V^-$$

$$W^+ \oplus (TKK(V) \oplus IDer(W)) \oplus W^-$$

y

$$V^+ \oplus W^+ \oplus (IDer(V) \oplus IDer(W)) \oplus V^- \oplus W^-$$

respecto de las cuales tenemos que $ZOC(L) = TKK(V)$, $ZOC(L) = TKK(W)$ y $ZOC(L) = L$. Luego el zócalo depende de la graduación. Parece que el problema está cuando en la parte cero de la graduación aparece un ideal de L.

Teorema 10.4 *Sea $L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$ no degenerada 3 graduada. Son equivalentes:*

i) *L tiene zócalo esencial.*

ii) *Existe S álgebra 3-graduada que coincide con su zócalo tal que*

$$S \lhd_e L \subset Der(S).$$

iii) $\oplus S_i \lhd L \subset \pi Der(S_i)$

Además, $Der(S)$ es 3-graduada.

Hay álgebras de Lie finitio dimensionales que no son 3 graduadas G_2, F_4, E_8 no tienen zócalo (El zócalo son las que verifica c.c.d.).

Si cambiamos de graduación, $L = L_1 \oplus L_0 \oplus L_{-1} = L'_1 \oplus L'_0 \oplus L'_{-1}$, ¿varía el zócalo?

¿Se puede definir un zócalo en álgebras de Lie en general?

¿Cómo es un álgebra de Lie 3-graduada simple que coincide con su zócalo?

Si $L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$ y L es no degenerada, $ZOC(L) \lhd_e L$; y se tiene $ZOC(L) \lhd_e L \subset Der(ZOC(L))$.

Definición 10.5 *Sea L un álgebra de Lie no degenerada. Definimos el zócalo de Jordan de L como*

$$JZOC(L) = \sum_{I \lhd L} ZOC(L) \lhd L$$

Es decir, se define como el mayor ideal 3 graduado de L que coincide con su zócalo.

Teorema 10.6 *Sea $L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$ tres graduada y sin ideales contenidos en la parte 0 (graduación efectiva), entonces*

$$ZOC(L) = JZOC(L).$$

En general se tiene la inclusión $ZOC(L) \subset JZOC(L)$.

¿Qué sucede en este caso con G_2, F_4 y E_8?

En este caso G_2, F_4 y E_8 son simples y no son 3 graduadas luego $JZOC(L) = 0$.

¿Cómo son las álgebras simples que coinciden con su zócalo?

Teorema 10.7 *Si L es no degenerada, son equivalentes*

i) *L tiene zócalo de Jordan esencial.*

ii) *$JZOC(L) \lhd_e L \subset Der(JZOC(L))$.*

Los pares de Jordan que coinciden con su zócalo son de 4 tipos: Álgebra de Lie simple que coincide con su zócalo$\approx TKK(V)$.

11 Zócalo de un álgebra de Lie

En un artículo de G. Benkort trabajaba con álgebras de Lie artinianas. Para introducir el concepto de artiniana dá una noción de ideal interno (artiniana $\rightarrow$ c.c.d. para los ideales internos).

Definición 11.1 *Se dice que un submódulo V de un álgebra de Lie L es un ideal interno de L si $[x,[x,L]] \subset V$ para todo $x \in V$.*

Teorema 11.2 *Si L es no degenerada y $B \lhd_{in}^{m} L$, entonces*

i) *B es un ideal de L simple sin elementos ad-nilpotentes.*

ii) *$[B,B] = 0$ implica que B es abeliano.*

Teorema 11.3 *Sea L un álgebra de Lie no degenerada y sea $x \in L$ tal que $ad_x^3 = 0$. Entonces $ad_x^2(L) \lhd_{in} L$ abeliano.*

Veamos otros resultados al respecto. Si B es abeliano interno minimal y $x \in B$, $B = ad_x^2(L)$ entonces $[x, [x, y]] = -2x$ y $[y, [y, x]] = -2y$ para todo $y \in L$. Es más, se tiene que ad_h es diagonalizable con valores propios: $-2, -1, 0, 1, 2$.

En este caso se tiene que $\{x, h, y\} \simeq sl_2$. Si R es asociativo y semiprimo, para todo $x, y \in R$ se tiene que $[x, [x, y]] = -2x$ y $[y, [y, x]] = -2y$ con $ad_x^3 = ad_y^3 = 0$. Se tiene que $ad_[x, y]$ es diagonalizable.

Como diagonaliza, tenemos $L = L_{-2} \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$ (son los subespacios propies asociados a ad_h). Se tiene además que

$$\begin{aligned} [h, [x_i, x_j]] &= [[h, x_i], x_j] + [x_i, h(x_j)] \\ &= i[x_i, x_j] + j[x_i, x_j] \\ &= (i + j)[x_i, x_j]. \end{aligned}$$

es decir, se tiene que es una 5 graduación.

en este caso:

$$L_{-2}[y, [y, L]]$$

es un ideal interno minimal.

$$\begin{aligned} L_{-1} &= [y, L_1] \\ L_1 &= [x, L_1] \\ L_2 &= [x, [x, L]] = B. \end{aligned}$$

Definición 11.4 *Sea L un álgebra de Lie no degenerada. Se define $ZOC(L)$ como la suma de todos los ideales internos minimales.*

Teorema 11.5 *Si L es no degenerada con $B \lhd_{in}^m L$ entonces $id_L(B)$ (es decir, el ideal generado por B en L) es simple.*

Lema 11.6 *L no degenerada, $\{x, h, y\}$ sl_2 triple se tiene que $[x, x + h - y]$ es un sl_2 triple minimal.*

Tenemos $ZOC(L) \lhd L$, además $ZOC(L) \lhd \oplus I_\alpha$, con I_α simple no degenerada coincide con su zócalo y es 5 graduada.

Es suma de los ideales internos minimales.

G_2, F_4, y E_8 todos los finito dimensionales coinciden con su zócalo.

Teorema 11.7 *Si L es simple no degenerada, $B, B' \lhd^m_{in} L$. Existe un automorfismo $\phi : L \to L$ tal que $\phi(B) = B'$.*

Si L es finito-dimensional sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, entonces

$$B \lhd^m_{in} L$$

lo que implica que $dim_F(B) = 1$. Si $x \in B$ entonces x es una raíz larga, $Fx \lhd^m_{in} L$. B es un ideal interno minimal si y solo si está generado por una raíz larga.

12 Relación entre el zócalo de Lie y el zócalo de Jordan.

Proposición 12.1 *Si L es un álgebra de Lie $2n+1$ graduada $L = L_{-n} \oplus \cdots L_0 \oplus \cdots L_n$. Sea $V = (L_{-n}, L_n) = (V^+, V^-)$, entonces $ZOC(V^\sigma) ZOC(L) \cap V^\sigma$.*

Proposición 12.2 *Sea L un álgebra de Lie que coincide con su zócalo y sea $x \in L$ tal que $ad_x^3 = 0$. Entonces existe $y \in L$ tal que $[x, [x, y]] = -2x$, $[y, [y, x]] = -2y$, es decir $\{x, h, y\}$ es un sl_2 triple.*

Definición 12.3 *Se dice que B es un ideal interno principal de L si existe $x \in L$ tal que $ad_x^3 = 0$ y $B = ad_x^2(L)$.*

Teorema 12.4 *Si $L = ZOC(L)$ es no degenerada, entonces L verifica la c.c.d. de sus ideales principales.*

Demostración. Tenemos $B_1 \supset B_2 \subset \cdots \supset B_n \supset \cdots$ principales.

$B_1 = [x_1, [x_1, L]]$ existe $y_1 \in L$ tal que $\{x_1, h_1 . y_1\}$ es un sl_2 triple.

Tenemos que $L = L_{-2} \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$. Luego B_i no sólo es ideal interno principal de L sino que es ideal interno principal de (L_{-2}, L_2) que es un par que coincide con su zócalo. ■

Teorema 12.5 *Sea L un álgebra de Lie no degenerada. Entonces el zócalo de Jordan de L coincide con las componentes 3 graduadas del zócalo de L.*

Tenemos pues la siguiente descomposición

$$ZOC(L) = \oplus S_i \oplus \bar{S}_i \oplus \bar{\bar{S}}_i$$

El último sumando es la parte 5 graduada. El primer término son los ideales internos minimales sin elementos ad nilpotentes. El segundo sumando corresponde a la parte 3 graduada y los dos últimos términos contienen ideales internos minimales abelianos.

Para finalizar analicemos el zócalo en el caso asociativo.

Dada un álgebra asociativa R, tenemos dos álgebras de Lie importantes

$$L = [R, R]/([R, R] \cap Z(R)).$$

Supuesto que tenemos una involución $*$, es decir $(R, *)$, consideramos $K = SKew(R, *) \subset R^-$. Definimos

$$L^* = [K, K]/(Z(R) \cap [K, K]).$$

Teorema 12.6 *Si R es semiprima y coincide con su zócalo. Entonces L y L^* son no degeneradas y coinciden con su zócalo.*

Teorema 12.7 *Sea L un álgebra de Lie simple no degenerada, $ZOC(L) = L$ conteniendo $B \subset L$ ideal interno abeliano no trivial. Entonces, existe un anillo R asociativo con o sin involución que coincide con su zócalo tal que $L \cong L$ o L^*.*

Observemos que si R no tiene divisores de cero entonces L, L^* tienen ideales simples $ZOC(L) = L$, $ZOC(L^*) = L^*$.