Sobre Números

1. LOS NÚMEROS NATURALES

1.1 Los números naturales aparecen por la necesidad que tiene el hombre (primitivo) tanto de contar como de ordenar una cierta cantidad de objetos.

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$$

En los números naturales podemos sumar y multiplicar, pero no podemos, en la mayoría de los casos, ni restar ni dividir.

Nota: históricamente el cero no es considerado un número natural.

1.2 Propiedades de los Números Naturales (Axiomas de Peano).

(1) El 1 es un número natural.

(2) Para cada número natural n existe otro número natural n'.

(1) Si $n \in \mathbb{N}$, $n' \neq 1$.

(3) Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n' = m'$, entonces $n = m$.

(4) Principio de inducción matemática.

Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:

- $1 \in S$ y
- si $n \in S$, entonces $n' \in S$.

Se tiene que $S = \mathbb{N}$

Nota: Observar que para cada $n \in \mathbb{N}$, n' no es más que $n + 1$.

1.3 Ejemplo. Demuestra que para todo número natural n se verifica que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Demo: Consideremos el conjunto S de los números naturales para los que la igualdad es cierta. Es claro que $1 \in S$, ya que $1 = 1^2$. Supongamos que la igualdad es cierta para n, es decir que $n \in S$ y veamos que es cierta para $n + 1$. Tenemos, por hipótesis, que

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Observar que el siguiente impar de $2n-1$ es $2n+1$, por tanto, si sumamos en ambos lados de la igualdad $2n+1$ obtenemos

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

es decir, que $n+1\in S$. Por tanto aplicando el principio de inducción matemática, $S=\mathbb{N}$, lo que demuestra que la igualdad es cierta para todo número natura. ■

1.4 Principio de inducción generalizado. Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:

- $1\in S$ y
- si $1,2,\ldots,n\in S$, entonces $n+1\in S$.

Entonces $S=\mathbb{N}$

2. LOS NÚMEROS ENTEROS

2.1 Aparecen simetrizando el conjunto de números naturales, y añadiéndoles el cero. Los denotaremos por $\mathbb{Z}$. Con este nuevo conjunto de números obtenemos la mejoría de que, ahora sí, la resta de dos números enteros es un número entero.

$$\mathbb{Z}:=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

2.2 Propiedades de los Números Enteros.

⋆ Propiedades respecto de la suma:

- Propiedad asociativa: $(x+y)+z=x+(y+z)\quad\forall\ x,y,z\in\mathbb{Z}$.
- Existencia de elemento neutro: $x+0=0+x=x\quad\forall\ x\in\mathbb{Z}$.
- Existencia de elemento opuesto: para todo $x\in\mathbb{Z}$ existe $-x\in\mathbb{Z}$ tal que $x+(-x)=(-x)+x=0$.
- Propiedad conmutativa: $x+y=y+x\quad\forall\ x,y\in\mathbb{Z}$.

⋄ Un conjunto con una operación que verifique las tres primeras propiedades se dice que es un **grupo**. Si además verifica la cuarta se le denomina **grupo abeliano**. Por tanto $(\mathbb{Z},+)$ es un grupo abeliano.

⋆ Propiedades respecto del producto:

- Propiedad asociativa: $(x\,y)\,z=x\,(y\,z)\quad\forall\ x,y,z\in\mathbb{Z}$.

- $\bullet^*$ Existencia de elemento neutro: $x\,1 = 1\,x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{Z}$.
- $\bullet^*$ Propiedad conmutativa: $x\,y = y\,x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$.

Nota: Observar que normalmente los elementos de $\mathbb{Z}$ no poseen inverso.

$\star$ Propiedades conjuntas:

- Propiedad distributiva: $(x + y)\,z = x\,z + y\,z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Nota: A un conjunto con dos operaciones que verifique todas las condiciones anteriores (menos las $\bullet^*$) se le denomina **Anillo**. Si además verifica las $\bullet^*$ se le denomina **anillo conmutativo y unitario**. Por tanto $\mathbb{Z}$ es un anillo conmutativo y unitario.

$\star$ Propiedades respecto del orden: para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$

- Si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$.
- Si $x \leq y$ y $z \geq 0$, entonces $x\,z \leq y\,z$.
- Si $x \leq y$, y $z \leq 0$, entonces $x\,z \geq y\,z$.

3. LOS NÚMEROS RACIONALES

3.1 Ampliando el conjunto de los números enteros a los racionales, $\mathbb{Q}$, conseguimos encontrar inversos respecto del producto (naturalmente salvo para el cero). Por lo que en $\mathbb{Q}$ vamos a poder sumar, restar, multiplicar y dividir (por números no nulos).

Los números racionales se definen a partir de una relación de equivalencia en el conjunto de los pares $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, en donde $\mathbb{Z}^*$ denota los enteros menos el cero. Diremos que dos pares (a, b) y (c, d) están relacionados si y sólo si $ad = bc$. La clase de equivalencia del elemento (a, b) se denota por $\frac{a}{b}$.

$$\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$$

Tenemos que la suma y el producto de números naturales es:

La suma: $\quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}$.

El producto: $\quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$.

3.2 Propiedades de los números Racionales.

Además de todas las propiedades que tenia $\mathbb{Z}$ nos encontramos con que todo elemento no nulo de $\mathbb{Q}$ posee inverso. Así:

$\star$ Propiedades respecto de la suma:

- Propiedad asociativa: $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{Q}$.
- Existencia de elemento neutro: $x+0 = 0+x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{Q}$.
- Existencia de elemento opuesto: para todo $x \in \mathbb{Q}$ existe $-x \in \mathbb{Q}$ tal que $x+(-x) = (-x)+x = 0$.
- Propiedad conmutativa: $x+y = y+x \quad \forall\, x,y \in \mathbb{Q}$.

$\star$ Propiedades respecto del producto:

- Propiedad asociativa: $(x\,y)\,z = x\,(y\,z) \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{Q}$.
- Existencia de elemento neutro: $x\,1 = 1\,x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{Q}$.
- Existencia de elemento inverso: para todo $0 \neq x \in \mathbb{Q}$ existe $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ tal que $x\,x^{-1} = x^{-1}\,x = 1$.
- Propiedad conmutativa: $x\,y = y\,x \quad \forall\, x,y \in \mathbb{Q}$.

$\star$ Propiedades conjuntas:

- Propiedad distributiva: $(x+y)\,z = x\,z + y\,z \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{Q}$.

Nota: A un conjunto con dos operaciones que verifique todas las condiciones anteriores se le denomina **Cuerpo**. Por tanto $\mathbb{Q}$ es un cuerpo.

$\star$ Propiedades respecto del orden: para todo $x,y,z \in \mathbb{Q}$

- Si $x \leq y$, entonces $x+z \leq y+z$.
- Si $x \leq y$ y $z \geq 0$, entonces $x\,z \leq y\,z$.
- Si $x \leq y$, y $z \leq 0$, entonces $x\,z \geq y\,z$.

4. LOS NÚMEROS REALES

4.1 No obstante, nos encontramos con operaciones que no se pueden realizar dentro del conjunto de los números racionales. Así, $\sqrt{2}$ no es un número Racional.

Esto nos lleva a un resultado que no sólo se creía cierto, sino que se consideró evidente hasta tiempos posteriores a Pitágoras. A saber, dadas dos longitudes a y b

longitud a

longitud b

existe una tercera longitud c ¿ — ? tal que tanto a como b son múltiplos de c?

Nota: La respuesta es que NO, ya que es falsa para 1 y $\sqrt[2]{2}$.

La construcción de los números Reales a partir de los números Racionales no es fácil, por lo que la vamos a omitir. Para nosotros los número Reales no será más que el conjunto de todas las medidas posibles. Denotemos por $\mathbb{R}$ al conjunto de números Reales con la suma y el producto usual. En $\mathbb{R}$ no solo tenemos que podemos sumar, restar, multiplicar y dividir (por números no nulos), sino que podemos hacer raíces de cualquier orden sobre número positivos y raíces de orden impar sobre cualquier Real.

4.2 Propiedades de los números Reales.

Los números Reales tienen todas las propiedades que verificaban los números Racionales. Es decir, $\mathbb{R}$ también es un **cuerpo**. Estas propiedades son:

⋆ Propiedades respecto de la suma:

- Propiedad asociativa: $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$.
- Existencia de elemento neutro: $x+0 = 0+x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.
- Existencia de elemento opuesto: para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x+(-x) = (-x)+x = 0$.
- Propiedad conmutativa: $x+y = y+x \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$.

⋆ Propiedades respecto del producto:

- Propiedad asociativa: $(x\,y)\,z = x\,(y\,z) \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$.
- Existencia de elemento neutro: $x\,1 = 1\,x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.
- Existencia de elemento inverso: para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}$ existe $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x\,x^{-1}) = x^{-1}\,x = 1$.
- Propiedad conmutativa: $x\,y = y\,x \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$.

⋆ Propiedades conjuntas:

- Propiedad distributiva: $(x+y)\,z = x\,z + y\,z \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$.

$\star$ Propiedades respecto del orden: para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$

- Si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$.
- Si $x \leq y$ y $z \geq 0$, entonces $x\,z \leq y\,z$.
- Si $x \leq y$, y $z \leq 0$, entonces $x\,z \geq y\,z$.

5. LOS NÚMEROS COMPLEJOS

5.1 Nos encontramos todavía con ciertas "deficiencias" en el conjunto de los números Reales. Por ejemplo no toda ecuación polinómica tiene solución en $\mathbb{R}$. Como caso particular, $X^2+1=0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, o lo que es prácticamente lo mismo, no existe la raíz cuadrada de ningún número negativo.

Vamos a construirnos un nuevo conjunto de números que de solución a este problema, los números Complejos. Denotemos por i un número "imaginario" que verifique que $i^2 = -1$ y sea $\mathbb{C}$ el conjunto:

$$\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$ diremos que a es la **parte real** de z mientras que b es su **parte imaginaria**. Vamos a poder definir una suma y un producto en $\mathbb{C}$:

La suma se define:	$(a + bi) + (c + di) = (a + c)+)(b + d)i$
El producto se define:	$(a + bi)\ .\ (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Nota: observar que no son suma y productos arbitrarios, ya que la suma se realiza "aplicando la propiedad distributiva y conmutativa" y el producto "aplicando además el hecho de que $i^2 = -1$".

Nota: Todo número Real lo podemos ver como un número Complejo, ya que todo $a \in \mathbb{R}$ puede verse como $a + 0i \in \mathbb{C}$. De ahora en adelante siempre veremos los números Reales como un subconjunto de los Complejos.

Antes de ver las propiedades que verifican los números Complejos veamos algunas definiciones y propiedades.

5.2 Def:. Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Se define el conjugado de z y se denota por $\overline{z}$ como $\overline{z} = a - bi$.

5.3 Def:. Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Se define el módulo de z, y se representa por $|z|$ como el número Real, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Nota: Observar que un número Complejo es cero si y sólo si su módulo es cero, es decir: dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$

$$z = 0 \iff |z| = 0.$$

5.4 LEMA. Sea $z \in \mathbb{C}$ un número Complejo. Entonces $z\overline{z} = |z|^2$.

Demo. Realmente sólo tenemos que hacer el producto:

$$z\,\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2) + 0i = |z|^2$$

por lo que queda demostrado el teorema. ■

Las propiedades que verifican los números Complejos son:

⋆ respecto de la suma:

- Propiedad asociativa.
- Existencia de elemento neutro: $0 + 0i = 0$ es el neutro de la suma.
- Existencia de elemento opuesto: para todo $a + bi \in \mathbb{C}$, $(-a) + (-b)i$ es el opuesto.
- Propiedad conmutativa.

⋆ Propiedades respecto del producto:

- Propiedad asociativa.
- Existencia de elemento neutro: $1 + 0i = 1$ es el elemento neutro del producto.
- Existencia de elemento inverso: para todo $0 \neq z = a + bi \in \mathbb{C}$,

  $$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i$$

  es el inverso de z.
- Propiedad conmutativa.

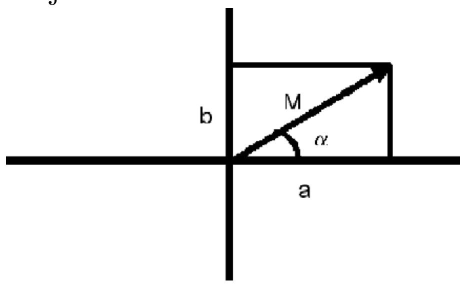
⋆ Propiedades conjuntas:

- Propiedad distributiva.

Nota: Los números Complejos también son un **Cuerpo**.

Nota: En los números Complejos no hemos dado una noción de orden, por lo que no podremos decir si un número Complejo es mayor o menor que otro.

5.5 La forma polar de un número Complejo. Vamos a usar el hecho de que todo número Complejo, $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se puede representar como un vector de R^2, el plano Real, en donde a es la coordenada en el eje de coordenadas y b es la coordenada en el eje de abscisa.



Así, z queda determinado por el módulo de este vector y el ángulo respecto del eje de coordenadas, al que llamaremos el argumento de z.

5.6 Def:. Cuando un número Complejo lo demos a partir de su modulo M y argumento α, diremos que z está en **forma polar**, y lo notaremos por $Z = M_\alpha$. En caso contrario, cuando demos un número Complejo en la forma $z = a + bi$ diremos que z está en **forma cartesiana**.

Nota: Es fácil, usando nociones básicas de trigonometría, pasar de la forma polar de un número Complejo a su forma cartesiana y viceversa.

$$z = a + bi, \quad \Rightarrow \quad z = |z|_{\mathrm{ArcTan}\frac{b}{a}}$$
$$z = M_\alpha \quad \Rightarrow \quad z = M\mathrm{Cos}\alpha + M\mathrm{Sen}\alpha\ i$$

Nota: Cuando nos encontramos con números polares puros, es decir, cuando la parte Real del número Complejo sea cero, tenemos que calcular la arcotangente de "infinito" ($\mathrm{ArcTan}\frac{b}{0}$) lo que será interpretado como el ángulo de 90 o de 180 grados.

Nota: Un número Complejo en forma polar tiene más de una representación, ya que para todo $z = M_\alpha$, se tiene que $Z = M_{\alpha+360} = M_{\alpha+360k}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ya que en su representación en el plano Real una o más vueltas (sumar o restar un número de veces 360 grados al argumento) no afecta a su representación. Por otro lado, por definición, M es un número Real positivo.

Nos encontramos con que va a ser más fácil multiplicar números en forma polar que en forma cartesiana. Así, dados $z = M_\alpha$ y $z' = M'_{\alpha'}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} z.z' &= (M\text{Cos}\alpha + M\text{Sen}\alpha\ i)(M'\text{Cos}\alpha' + M'\text{Sen}\alpha'\ i) \\ &= (MM'\text{Cos}\alpha\ \text{Cos}\alpha' - MM'\text{Sen}\alpha\ \text{Sen}\alpha') \\ &+ (MM'\text{Cos}\alpha\ \text{Sen}\alpha' - MM'\text{Cos}\alpha'\ \text{Sen}\alpha)i \\ &= MM'\text{Cos}(\alpha+\alpha') + MM'\text{Sen}(\alpha+\alpha')i = MM'_{(\alpha+\alpha')} \end{aligned}$$

Nota: es decir, si queremos multiplicar números Complejos en forma polar se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.

5.7 Soluciones de ecuaciones polinómicas en $\mathbb{C}$. Dada una ecuación polinómica de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tenemos que sus soluciones son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cuando sólo disponíamos de los números Reales nos encontrábamos que cuando $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación "no tenia solución". Ahora, ya podemos trabajar con los números Complejos, por lo que:

⋆ Caso Real con dos raíces distintas: Si $b^2 - 4ac > 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

⋆ Caso Real con una raíz doble: Si $b^2 - 4ac = 0$

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

⋆ Caso Complejo con dos raíces conjugadas: Si $b^2 - 4ac < 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} i.$$

Las ecuaciones de grado superior son algo mas difíciles, no obstante todavía podemos resolver algunas más.

Vamos a calcular las soluciones de la ecuación $X^n = 1$. Sabemos que una primera solución es $x = 1$. Es más, si suponemos que las soluciones son complejas, $x = M_\alpha$ nos encontramos con las ecuaciones:

$$1 = 1_{360k} = (M_\alpha)^n = M^n_{n\alpha}$$

por lo que $M = 1$ (sólo existe un número Real positivo que verifique que $M^n = 1$) y $\alpha = \frac{360}{n}k$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Podríamos poner k mayores, pero entonces se empezarían a repetir las raíces. Por tanto el conjunto de soluciones de la ecuación $X^n = 1$ es:

$$\{1_{\frac{360}{n}}, 1_{2\frac{360}{n}}, \ldots, 1_{(n-1)\frac{360}{n}}\}$$

Este conjunto de números es importante en matemáticas, cada uno de sus elementos se denomina una **raíz n-esima de la unidad**.

Nota: Si denoto por $\gamma = 1_{\frac{360}{n}}$, tenemos que $\gamma^k = 1_{k\frac{360}{n}}$, por lo que el conjunto de las raíces n-esimas de la unidad es $\{\gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^n = 1\}$.

Nota: Las raíces cuadradas de la unidad no son más que $\{1_{180}, 1_{360}\} = \{-1, 1\}$.

Vamos a calcular las soluciones de la ecuación $X^n = a$, con $0 < a \in \mathbb{R}$. Sabemos que una primera solución es $x = \sqrt[n]{a}$. Es más, si $\gamma = 1_{\frac{360}{n}}$, el conjunto de las n soluciones es:

$$\{\sqrt[n]{a}\gamma, \sqrt[n]{a}\gamma^2, \ldots, \sqrt[n]{a}\gamma^n = \sqrt[n]{a}\}.$$