Relación 1 **Secciones (1.1), (1.2) y (1.3)**

1-. Decir si los siguientes conjuntos, con las operaciones indicadas, tienen estructura de anillo. En caso afirmativo: ¿son conmutativos?, ¿unitarios?, ¿de división?... ¿cuáles son sus elementos inversibles?

(i) $\mathbb{Z}^+$ con la suma y producto usual.

(ii) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(iii) $\mathbb{N}$ con primera operación: el producto y segunda operación la potencia, es decir: "$a + b$ igual a ab" y "a por b igual a a^b".

(iv) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 3x \in \mathbb{Z}\}$ con las operaciones usuales.

2-. ¿Es posible dar una estructura de anillo en el conjunto $\mathbb{Z}$ en donde la primera operación sea el producto? ¿Y en la que la segunda operación sea la suma? Demuestra que no es posible o construye dicha operación. [$*$]

3-. Sea X un conjunto no vacío, $\mathcal{P}$ el conjunto de partes de X y $\triangle$ la operación diferencia simétrica. Demuestra que $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ es un anillo conmutativo y unitario. Da una condición necesaria y suficiente para que sea dominio de integridad.

4-. Sea R un anillo. Demuestra que si $a \in R$ es un divisor de cero, entonces a no es inversible.

5-. Demuestra que todo subanillo unitario de un dominio de integridad es un dominio de integridad. ¿Has demostrado algo más general?

6-. Demuestra que si R es un anillo unitario y S es un subanillo suyo, S no tiene por qué ser unitario. Es más, si S es unitario las unidades de R y S pueden no coincidir.

7-. Sea R un anillo sin divisores de cero y S un subanillo de R. Entonces, si S es unitario, R es unitario con la misma unidad.

8-. Demuestra que en $\mathbb{Z}_{12}$ la ecuación $X^2 - 1 = 0$ tiene más de dos soluciones. Demuestra que en un dominio de integridad la ecuación anterior sólo posee, a lo sumo, dos soluciones. ¿Sabrías encontrar un anillo en donde sólo posea una?

9-. Se dice que un elemento x en un anillo R es nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$, tal que $x^n = 0$. Encuentra una condición necesaria y suficiente para que $\mathbb{Z}_n$ no tenga elementos nilpotentes. Calcula los nilpotentes de $\mathbb{Z}_{120}$. [$*$]

10-. Demuestra que un anillo R no posee elementos nilpotentes si y sólo si el único elemento $x \in R$ tal que $x^2 = 0$ es $x = 0$.

11-. Sea R un anillo. Un elemento $x \in R$ que verifica que $x = x^2$ se dice que es un idempotente. Demuestra que un anillo en donde todo elemento es idempotente es conmutativo. [$*$]

12-. Sea R un anillo y $e \in R$ un idempotente. Demuestra que

$$eRe := \{exe \mid x \in R\} = \{x \in R \mid xe = ex = x\}$$

es un subanillo unitario de R (que no se te olvide comprobar la igualdad de los conjuntos anteriores). Demuestra que si $eRe = R$, entonces $e = 1$.

13-. Demuestra que en un anillo sin divisores de cero los únicos (posibles) idempotentes son 0 y 1 (llamados idempotentes triviales). Encuentra algún idempotente no trivial en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

14-. ¿Cuales son los endomorfismos de $\mathbb{Z}$? ¿Cuáles son los endomorfismos de $\mathbb{Z}$, considerado éste como grupo abeliano?

15-. Da un ejemplo de un anillo R no conmutativo tal que $\mathcal{U}(R)$ sea un grupo abeliano. [$*$]

16-. Sea R un anillo unitario y $a \in R$ tal que existe $b \in R$ con $ab = 1$. Demuestra que son equivalentes:

- a no es inversible.
- existe $b' \in R$ con $b' \neq b$ y $ab' = 1$.
- a es divisor de cero.

Demuestra que en las condiciones anteriores, R contiene un idempotente no trivial (distinto de 0 y 1). [$*$]

17-. Demuestra que en un anillo sin idempotentes no triviales, si $ab = 1$ entonces $ba = 1$.

18-. Sea R un anillo con al menos dos elementos. Supongamos que para cada $0 \neq x \in R$ existe un **único** $y \in R$ con $x = xyx$. Demuestra que: R no tiene divisores de cero. Si $xyx = x$, entonces $yxy = y$. R es unitario. R es un anillo de división. [$**$]

19-. Encuentra un anillo R que no sea de división y tal que para cada $x \in R$ exista $y \in R$ con $x = xyx$. [$*$]

El símbolo [$*$] significa dificultad moderada y [$**$] dificultad media.