Relación 2 **Tema 1 (de (1.4) a (1.9)) y Tema 2**

1-. Sea R un anillo de característica n. Demuestra que R puede verse como subanillo de un anillo unitario de característica n. [$*$]

2-. Sean R y R' dos anillos y $f : R \to R'$ un homomorfismo de anillos. Entonces:

(i) Si R es un anillo unitario, $\mathrm{Im}(f)$ es un anillo unitario con unidad $f(1)$.

(ii) Si a es un elemento inversible de R, $f(a)$ es un elemento inversible de $\mathrm{Im}(f)$.

(iii) Si f es sobreyectiva, entonces $f(1) = 1'$ y $f(a)$ es inversible para todo elemento inversible $a \in R$.

(iv) Si R y R' son unitarios y $f(1) = 1'$, $f(a)$ es inversible para todo elemento inversible $a \in R$.

3-. Sean R y R' dos anillos y $f : R \to R'$ un homomorfismo de anillos. Demuestra que si R es un anillo de división, f es inyectiva o es la aplicación nula.

4-. Sea R un anillo sin divisores de cero y sean $a, b \in R$ tales que $ab = a$. Demuestra que R es unitario con b el elemento unidad (si te sirve de ayuda, demuestra en primer lugar que $b^2 = b$). [$*$]

5-. Demuestra que si un anillo R sin divisores de cero posee un subanillo S unitario, entonces R es unitario.

6-. Sean R y R' dos anillos con R unitario y R' sin divisores de cero. Sea $f : R \to R'$ un homomorfismo de anillos. Demuestra que R' es unitario o f es la aplicación nula.

7-. Sea R un anillo finito sin divisores de cero. [$*$]

(i) Demuestra que R es unitario.

(ii) Demuestra que R es un anillo de división.

8-. Sean R y S dos anillos de características r y s respectivamente. Calcula la característica de $R \oplus S$.

9-. Demuestra que la característica de un anillo de división es un número primo (¿que has demostrado?). ¿Puedes encontrar un anillo de característica prima que no sea dominio de integridad?

10-. Sea R un anillo conmutativo de característica n. Demuestra que la aplicación $\Phi : R \to R$ definida por $\Phi(x) = x^n$ es un homomorfismo de anillos. Es más, Φ es inyectiva si y sólo si R no tiene elementos nilpotentes.

11-. Calcula el anillo de endomorfismos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con su estructura de grupo abeliano. Demuestra que es un anillo unitario, no conmutativo. [$*$]

12-. Demuestra que $1 + X$ es inversible en el anillo de series formales $\mathbb{R}[[X]]$.

13-. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas razonando la respuesta: [$*$]

(i) Todo anillo tiene elemento neutro para el producto.

(ii) En un anillo conmutativo de característica n, $(x + y)^n = x^n + y^x$

(iii) Todo anillo finito es unitario.

iv) Un anillo R en donde los únicos subanillos son $\{0\}$ y R es de división.

(v) Los endomorfismos de un anillo R con la suma y productos usuales de las aplicaciones son un anillo que tienen la misma característica que R.

(vi) Si R y S son dos anillos de división, $R \oplus S$ es un anillo de división.

(vii) Si R y S no tienen elementos nilpotentes, $R \oplus S$ no tiene elementos nilpotentes.

14-. Todo anillo R puede verse como subanillo de $\mathcal{M}_n(R)$, el anillo de matrices de tamaño $n \in \mathbb{N}$ sobre R. Si R es un anillo finito, R no es isomorfo a $\mathcal{M}_n(R)$ para $n > 1$.

15-. Demuestra que en un anillo finito R, los elementos, o son inversibles, o son divisores de cero. ¿Sabrías encontrar un anillo infinito en donde esto no ocurra? ¿y en donde esto ocurra?

16-. Sea $n \in \mathbb{N}$ y denotemos por $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a la función de euler. Supongamos que n factoriza como $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$. Demuestra que [$*$]

$$\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k})$$

(i) Demuestra que si n, m son primos relativos, entonces $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$

Ayuda: por el primer cuatrimestre, $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, luego sólo hace falta contar generadores.

(ii) Demuestra que si p es un número primo, $\phi(p^n) = p^n - p^{n-1} = p^n(1 - \frac{1}{p})$.

17-. Si $n, m \in \mathbb{Z}$ son primos relativos, los grupos abelianos $\mathbb{Z}_{nm}$ y $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ son isomorfos. ¿Son isomorfos también como anillos?

El símbolo [$*$] significa dificultad moderada y [$**$] dificultad media.