Relación 3 **Tema 3 y Tema 4**

1-. Sea $D = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(i) Demuestra que D es un dominio de integridad.

(ii) Calcula el cuerpo de fracciones de D, denotado por $\mathcal{Q}(D)$, y da el único monomorfismo $f : \mathcal{Q}(D) \to \mathbb{R}$ que es la inclusión cuando restringimos a D.

(iii) Por si no te has dado cuenta, demuestra que $\mathcal{Q}(D) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Calcula el inverso de $2 + 3\sqrt{2}$ y dalo en la forma $a + b\sqrt{2}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$.

2-. Sea D un dominio de integridad y D' un subanillo unitario de D. Demuestra que D' es también un dominio de integridad. ¿El cuerpo de fracciones de D y D' coinciden?

3-. Calcula el menos subanillo unitario de $\mathbb{R}$ que contiene a $\sqrt[3]{5}$.

4-. Sea D y D' dos dominios de integridad y $f : D \to D'$ un monomorfismo de anillos. ¿Puedes encontrar un homomorfismo de anillos $\bar{f} : \mathcal{Q}(D) \to \mathcal{Q}(D')$ tal que $\bar{f}(\frac{b}{1}) = \frac{f(b)}{1}$? ¿Y si f no es un monomorfismo?

5-. Sean R y R' dos anillos, I un ideal de R y $f : R \to R'$ un homomorfismo de anillos. Demuestra que las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $I \subset \mathrm{Ker}(f)$.

(ii) Existe un único homomorfismo de anillos $\bar{f} : R/I \to R'$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & R' \\ R/I \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

6-. Demuestra que todo anillo unitario R posee ideales maximales. ((i) Demuestra, aplicando el lema de Zorn, que hay elementos maximales en la familia de los ideales de R que no contienen al 1. (ii) Demuestra que un ideal de esta familia es maximal en R).