# TEMA 3.

## 1. INTRODUCCIÓN

El tema anterior ha tratado sobre los dominios de integridad, y muy particularmente sobre $\mathbb{Z}$, el anillo de los enteros. Es por todos conocidos la construcción de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$:

– Definimos una relación de equivalencia en el conjunto de los pares $(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$, en donde $\mathbb{Z}^*$ denota los enteros menos el cero. Diremos que dos pares $(a, b)$ y $(a', b')$ están relacionados si y sólo si $ab' = a'b$. La clase de equivalencia del elemento $(a, b)$ se denota por $\frac{b}{a}$.

$$\mathbb{Q} := \{\frac{b}{a} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0\}$$

– Definimos la suma y el producto en este conjunto como:

$$\text{La suma:} \qquad \tfrac{b}{a} + \tfrac{b'}{a'} := \tfrac{ba'+ab'}{aa'}.$$

$$\text{El producto:} \qquad \tfrac{b}{a} \times \tfrac{b'}{a'} := \tfrac{bb'}{aa'}.$$

Nos encontramos con que $(\mathbb{Q}, +, .)$ es el cuerpo de los racionales.

En este tema vamos a demostrar que esta construcción no es exclusiva de $\mathbb{Z}$, sino que cualquier dominio de integridad se "sumerge" de forma similar en un cuerpo.

## 2. CONSTRUCCIÓN DEL CUERPO DE FRACCIONES DE UN DOMINIO DE INTEGRIDAD

Sea $D$ un dominio de integridad. Consideremos

$$D^* \times D := \{(a, b) \in D \times D \mid a \neq 0\}$$

**2.1** Proposición. Sea $D$ un dominio de integridad. Entonces, en $D^* \times D$ la relación, $(a, b) \cong (a', b')$ si y sólo si $ab' = a'b$, es de equivalencia.

**Demo:** Veamos que $\cong$ verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:

$\star$ Reflexiva: sea $(a, b) \in D^* \times D$. Entonces $ab = ab$, con lo que $(a, b) \cong (a, b)$.

$\star$ Simétrica: Supongamos que $(a, b) \cong (a', b')$. Entonces, $ab' = a'b$ que directamente da $(a', b') \cong (a, b)$.

$\star$ Transitiva: Supongamos que $(a, b) \cong (a', b')$ y $(a', b') \cong (a'', b'')$. Entonces:

$$ab' = a'b \quad \text{y} \quad a'b'' = a''b'$$

si multiplicamos en la segunda igualdad por $a$ y sustituimos $ab'$ por $a'b$ (primera igualdad) obtenemos $aa'b'' = aa''b' = a''a'b$ (por lo que simplificando $0 \neq a'$, al verificar $D$ la leyes de simplificación) $ab'' = a''b$, lo que nos demuestra que $(a, b) \cong (a'', b'')$. ■

**Nota:** El conjunto cociente $D^* \times D/\cong$ se denotará por $\mathcal{Q}(D)$. La clase de equivalencia de un elemento $(a, b) \in D^* \times D$ será denotada por $\frac{b}{a}$.

**2.2** TEOREMA. Sea $D$ un dominio de integridad. Entonces, en $\mathcal{Q}(D)$, las operaciones

La suma: $\frac{b}{a} + \frac{b'}{a'} := \frac{ab'+ba'}{aa'}$.

El producto: $\frac{b}{a} \times \frac{b'}{a'} := \frac{bb'}{aa'}$.

dotan a $\mathcal{Q}(D)$ de estructura de cuerpo (llamado el **cuerpo de fracciones** del dominio de integridad $D$). Es más, la aplicación $i : D \to \mathcal{Q}(D)$ definida por $i(d) = \frac{d}{1}$ es un monomorfismo de anillos unitarios.

**Demo:** Veamos que la suma anterior define una estructura de grupo abeliano en $\mathcal{Q}(D)$, para ello tendremos que demostrar:

(i) Que está bien definida (hace falta ver que el elemento $(aa', ab'+ba') \in D^* \times D$ y que esta suma no depende de los representantes.

(ii) Verifica las propiedades de grupo abeliano.

(i.1) Es claro que $aa' \neq 0$ ya que $D$ es un dominio de integridad y $a \neq 0 \neq a'$.

(i.2) Veamos que esta suma no depende de los representantes. Supongamos que $(b, a) \cong (b_1, a_1)$ y que $(b', a') \cong (b'_1, a'_1)$. Tenemos entonces que:

$$ab_1 = a_1 b \quad \text{y} \quad a'b'_1 = a'_1 b' \qquad (H)$$

y queremos demostrar que $(aa', ab' + ba') \cong (a_1a_1', a_1b_1' + b_1a_1')$, es decir:

$$aa'(a_1b_1' + b_1a_1') = a_1a_1'(ab' + ba')$$

$$\begin{aligned} aa'(a_1b_1' + b_1a_1') &= *^1 aa'a_1b_1' + aa'b_1a_1' = *^2 aa_1(a'b_1') + (ab_1)a'a_1' \\ &= *^3 aa_1(a_1'b') + (a_1b)a'a_1' = *^4 a_1a_1'(ab' + ba') \end{aligned}$$

$*^1$ aplicando la propiedad asociativa y la distributiva.

$*^2$ aplicando la propiedad asociativa y la conmutativa.

$*^3$ aplicando las identidades de (H).

$*^4$ aplicando la propiedad asociativa, la conmutativa y la distributiva.

Luego la suma está bien definida en $\mathcal{Q}(D)$. Veamos ahora que $(\mathcal{Q}(D), +)$ tiene estructura de grupo abeliano. Antes veamos algunas propiedades útiles:

$(P_1)$ Dado un elemento no nulo $c \in D$, para todo $\frac{b}{a} \in \mathcal{Q}(D)$, $\frac{b}{a} = \frac{cb}{ca}$.

$(P_2)$ Dos elementos $\frac{b}{a}$, $\frac{b'}{a'}$ de $\mathcal{Q}(D)$ tienen representantes con el mismo denominador: $\frac{b}{a} = \frac{ba'}{aa'}$ y $\frac{b'}{a'} = \frac{ab'}{aa'}$.

$(P_3)$ La suma de dos elementos $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$ con el mismo "denominador" consiste en sumar "numeradores":

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{ba + ca}{a^2} = \frac{b + c}{a}$$

con estas tres propiedades, ya podemos demostrar fácilmente que $(\mathcal{Q}(D), +)$ tiene estructura de grupo abeliano. Por $P_3$ voy a tomar, cuando me sea de interés, "fracciones" con el mismo denominador"

(ii.1) Asociativa: sean $\frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a}, \frac{b_3}{a} \in \mathcal{Q}(D)$. Entonces:

$$\left(\frac{b_1}{a} + \frac{b_2}{a}\right) + \frac{b_3}{a} = \frac{b_1 + b_2}{a} + \frac{b_3}{a} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{a} = \frac{b_1}{a} + \frac{b_2 + b_3}{a} = \frac{b_1}{a} + \left(\frac{b_2}{a} + \frac{b_3}{a}\right)$$

(ii.2) Conmutativa: sean $\frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a} \in \mathcal{Q}(D)$. Entonces:

$$\frac{b_1}{a} + \frac{b_2}{a} = \frac{b_1 + b_2}{a} = \frac{b_2 + b_1}{a} = \frac{b_2}{a} + \frac{b_1}{a}$$

(ii.3) Neutro: $0 = \frac{0}{1} \in \mathcal{Q}(D)$.

(ii.4) Opuesto: dado $\frac{b}{a} \in \mathcal{Q}(D)$, $\frac{-b}{a}$ es su opuesto, ya que $\frac{b}{a} + \frac{-b}{a} = \frac{0}{a} = 0$.

**Nota:** El neutro de la suma es cualquier elemento de la forma $\frac{0}{a}$ con $a \in D^*$.

Veamos ahora la propiedad asociativa del producto y las distributivas:

(iii.1) Asociativa: sean $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3} \in \mathcal{Q}(D)$. Entonces:

$$\left(\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}\right)\frac{b_3}{a_3} = \frac{b_1b_2}{a_1a_2}\frac{b_3}{a_3} = \frac{b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3} = \frac{b_1}{a_1}\frac{b_2b_3}{a_2a_3} = \frac{b_1}{a_1}\left(\frac{b_2}{a_2}\frac{b_3}{a_3}\right)$$

(iii.2) Conmutativa: sean $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2} \in \mathcal{Q}(D)$. Entonces:

$$\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1b_2}{a_1a_2} = \frac{b_2b_1}{a_1a_2} = \frac{b_2}{a_2}\frac{b_1}{a_1}$$

(iv) Distributiva: demostramos sólo la distributiva por un lado, ya que hemos demostrado que el producto es conmutativo. Sean $\frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a}, \frac{b_3}{a} \in \mathcal{Q}(D)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\left(\frac{b_1}{a} + \frac{b_2}{a}\right)\frac{b_3}{a} &= \frac{b_1+b_2}{a}\frac{b_3}{a} = \frac{(b_1+b_2)b_3}{a^2} = \frac{b_1b_3+b_2b_3}{a^2} \\ &= \frac{b_1b_3}{a^2} + \frac{b_2b_3}{a^2} = \frac{b_1}{a}\frac{b_3}{a} + \frac{b_2}{a}\frac{b_3}{a}\end{aligned}$$

Por último demostremos que $\mathcal{Q}(D)$ es un cuerpo, es decir, que es un anillo unitario y que todo elemento no nulo tiene inverso.

(v.1) Elemento neutro: el elemento $\frac{1}{1}$ es el elemento neutro de la suma.

**Nota:** por la propiedad $P_1$, $\frac{1}{1} = \frac{a}{a}$ para todo $a \in D^*$.

(v.2) Sea $\frac{b}{a}$ un elemento no nulo de $\mathcal{Q}(D)$. Por lo anterior, $b \neq 0$ y por tanto, $\frac{b}{a}$ es el inverso:

$$\frac{b}{a}\frac{a}{b} = \frac{ba}{ab} = \frac{1}{1}$$

Veamos que la aplicación $i : D \to \mathcal{Q}(D)$, definida por $i(d) := \frac{d}{1}$, es un monomorfismo de anillos.

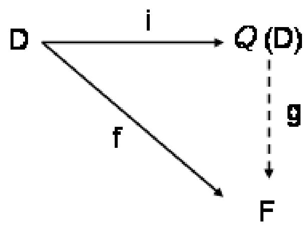
$$\begin{aligned}i(b_1+b_2) &= \frac{b_1+b_2}{1} = \frac{b_1}{1} + \frac{b_2}{1} = i(b_1) + i(b_2) \\ i(b_1b_2) &= \frac{b_1b_2}{1} = \frac{b_1}{1}\frac{b_2}{1} = i(b_1)i(b_2)\end{aligned}$$

Por último si $i(b) = 0$, entonces $\frac{b}{1} = \frac{0}{1}$ por lo que $b1 = 0.1 = 0$ y $b = 0$, es decir, $i$ es una aplicación inyectiva. ■

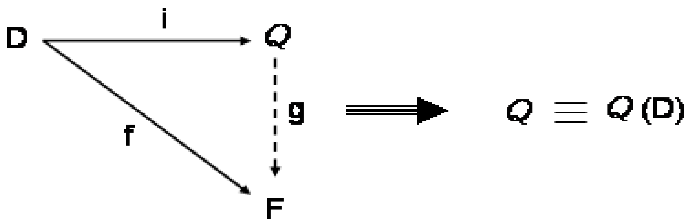
**2.3** COROLARIO. Un anillo $R$ es un dominio de integridad si y sólo si es subanillo de un cuerpo.

La segunda parte importante del cuerpo de fracciones $\mathcal{Q}(D)$ de un dominio de integridad $D$ es que es el cuerpo "más pequeño" que contiene a $D$. Naturalmente la noción de "ser más pequeño que" es:

**2.4** TEOREMA. Sea $D$ un dominio de integridad, $F$ un cuerpo y $f : D \to F$ un monomorfismo de anillos. Entonces existe un único monomorfismo de anillos $g : \mathcal{Q}(D) \to F$ que hace conmutativo el diagrama.




Es más, si $Q$ es un cuerpo tal que existe un monomorfismo de anillos $i : D \to Q$ y tal que para cada cuerpo $F$ y cada monomorfismo de anillos $f : D \to F$, existe un único monomorfismo de anillos $g : Q \to F$ que hace conmutativo el diagrama. Se tiene que $Q$ es isomorfo al cuerpo de fracciones de $D$.




## 3. GENERALIZACIONES

En todo este tema hemos partido de $D$, un dominio de integridad, pero ¿nos hacia falta tanto?

**3.1** Unidad. Si nos fijamos bien en la demostraciones que hemos hecho, ¿donde se usa que $D$ sea unitario?

En la proposición (2.1) no se usa el carácter unitario: la relación $(a,b) \cong (a',b')$ si y sólo si $ab' = a'b$ es de equivalencia, sea $D$ unitario o no.

El Teorema (2.2) demuestra que el conjunto cociente, $\mathcal{Q}(D)$ con las operaciones definidas tiene estructura de anillo (aquí no hace falta la unidad. Para demostrar que $\mathcal{Q}(D)$ es un cuerpo (luego unitario), parece ser que sí. No obstante, dado $0 \neq a \in D$, $\frac{a}{a}$ es la unidad de $\mathcal{Q}(D)$ y el inverso de un elemento no nulo $\frac{b}{a}$ sigue siendo $\frac{a}{b}$. Por lo que la unidad de $D$, en realidad, no ha hecho falta.

Si nos damos cuenta, los últimos teoremas tampoco hacen uso de que $D$ tiene un elemento unitario.

**3.2** Divisores de cero. Aquí la cosa se complica algo más. Pero en realidad dado un anillo $R$, si definimos el conjunto $Z(R)$ como:

$$Z(R) = \{a \in R \mid ax = xa \quad \text{para todo} \quad x \in R\}$$

y no hay divisores de cero $R$ contenidos en $Z(R)$. Se puede dar una construcción idéntica en la anterior, en la que se obtiene un anillo denotado por $Z^{-1}R$ y que tiene la propiedad que todo elemento no nulo de $Z(R)$ es inversible en $Z^{-1}R$.

Observar que si $D$ es un dominio de integridad $Z(D) = D$.

## 4. BIBLIOGRAFíA.

⋆ **J. B. Fraleigh**, “A First Course in Abstract Algebra”. Addison-Wesley Publishing Company (1982).

⋆ **W. Keith Nicholson**, “Introduction to Abstract Algebra”. J. Wesley & Sons Publishing Company (1999).