1-. Sea D un dominio de integridad. Sabemos que la noción "ser asociado" es de equivalencia. Demuestra que en el conjunto cociente $Q/\sim$ la relación $\bar{a}|\bar{b}$ si $a|b$ (está bien definida) y es una relación de orden.

2-. Sea D un dominio de integridad. Demuestra que D es un cuerpo si y sólo si para todo par de elementos no nulos $a, b \in D$, $a \sim b$.

3-. Sea D un dominio de integridad y sea $a \in D$ un elemento primo. Demuestra que si b es asociado a a, entonces b es un elemento primo de b.

4-. Sea D un dominio de integridad y sean $a, b, c \in D$. Demuestra que si $a = bc$ y a es asociado con b entonces c es una unidad.

5-. Demuestra que $\mathbb{Z}[X]$ es un DFU que no es DIP.

Nota: Puedes demostrar que $I = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid p(0) \text{ es par}\}$ es un ideal de $\mathbb{Z}[X]$ que no es principal.

6-. Sea D un DE y sea $0 \neq a \in D$. Demuestra que $\delta(1) \leq \delta(a)$. Es más, $\delta(a) = \delta(1)$ si y sólo si a es inversible.

7-. ¿Todo subanillo unitario de un DFU, DIP o DE es un DFU, DIP o DE?

8-. Sea D un dominio euclídeo y sean $a, b \in D$ con $b \neq 0$. Demuestra que los elementos que aparecen $c, r \in D$ tales que $a = cb + r$ son únicos.

9-. Demuestra que un dominio de integridad verifica la condición de cadena descendente para ideales si y sólo si D es un cuerpo.

10-. Sea D un DFU y sean $a, b, c \in D$. Supongamos que $m.c.d(a, b) = 1$ y que $a|bc$. Demuestra que $a|c$.

11-. Sea D un dominio de integridad. Demuestra que las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) D es un cuerpo.

(ii) $D[X]$ es un dominio euclídeo.

(iii) $D[X]$ es un dominio de ideales principales.

12-. Sea D un DE. Si $a \sim b$, entonces $\delta(a) = \delta(b)$. ¿Es cierto el recíproco?