Relación 5 **Sección semifinal**

1-. Calcula las raíces de $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \in \mathbb{Z}_5[X]$.

2-. Demuestra que $x^3 + x + 1$ es un polinomio irreducible de $\mathbb{Z}_2[X]$.

3-. ¿Existe algún cuerpo con 8 elementos? Si la respuesta es afirmativa, da las tablas de multiplicación.

4-. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo. Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{F}[X]$. Demuestra que si $0 \neq a \in \mathbb{F}$ es raíz $p(x)$, entonces a^{-1} es raíz de $a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n$

5-. Sea $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \in \mathbb{Z}_p[X]$. Calcula p para que 1 sea raíz de $p(x)$.

6-. Sea $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ax^4 \in \mathbb{R}[X]$. Calcula a para que $p(x)$ sea divisible por $x - 2$.

7-. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo. Demuestra que si $p(x) \in \mathbb{F}[X]$ es una unidad, $p(x) = a_0$ (es decir $deg(p(x)) = 0$) con $a_0 \neq 0$.

8-. Demuestra que en $\mathbb{Z}_4[X]$ hay infinitos elementos inversibles.

9-. ¿Existe un cuerpo $\mathbb{F}$ y un polinomio $p(x) \in \mathbb{F}[X]$ tal que $p(a) = 0$ para todo $a \in \mathbb{F}$?.

10-. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[X]$. Demuestra que si $c \in \mathbb{C}$ es raíz de $p(x)$ entonces $\bar{c}$, el conjugado de c también es raíz. Es mas, $h(x) = (X - c)(X - \bar{c}) \in \mathbb{R}[X]$ y $p(x)$ es divisible por $h(x)$.

11-. Si dos polinomios $p(x), q(x) \in \mathbb{F}[X]$ tienes las mismas raíces, ¿Son asociados?

12-. Determina si los siguientes polinomios son irreducibles en $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}_2$: $p_1(x) = X^2 + 1$, $p_2(x) = x^4 + x^2 + 1$, $p_3(x) = 15 + 3X + 6X^2 + 8X^20$

Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de $p_2(x)$ y $p_1(3)$ sobre $\mathbb{R}$.

13-. Encuentra un cuerpo con 81 elementos.

14-. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y sea $p(x) \in \mathbb{F}[X]$. Encuentra un cuerpo $\mathbb{F}'$ extensión de $\mathbb{F}$ tal que $p(x)$ tenga una raíz. Concluir que dado un polinomio $p(x) \in \mathbb{F}[X]$ siempre existe un cuerpo en donde $p(x)$ factoriza.

15-. ¿un ideal I de $\mathbb{F}[X]$, con $\mathbb{F}$ un cuerpo, es primo si y sólo si es maximal?