Matemáticas
CCAA

Índice general

Capítulo 1

Conceptos Básicos

Objetivos del capítulo

- Introducir los conceptos básicos de la Teoría de conjuntos. Estudiar las operaciones entre conjuntos y sus propiedades.
- Introducir los Números Naturales y los Números Enteros estudiando sus propiedades respecto de la suma, del producto y del orden. Especialmente el principio de inducción e inducción generalizado.
- Estudiar el cuerpo de los racionales, los reales y los complejos. Especialmente las soluciones de ciertas ecuaciones en el cuerpo de los complejos.
- Estudiar el concepto de aplicación. Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas, biyectivas. Composición de aplicaciones. Aplicación inversible.

---

1. Conjuntos.

Toda teoría matemática consta de axiomas, o elementos primitivos, a partir de estos se construyen las definiciones. Las relaciones "lógicas" entre definiciones dan lugar a los teoremas (Lema, Proposición, Teorema y Corolario). Comenzamos este capítulo con la noción de conjunto.

1.1. Definiciones básicas.

Conceptos A Un **conjunto** es una colección de objetos.

• Un conjunto queda caracterizado por los objetos que lo forman. Así, podemos crear un conjunto dando explícitamente cada uno de sus elementos o bien dando una propiedad que caracterice a los elementos que lo forman.

• Los elementos de un conjunto deben de estar perfectamente determinados "antes" de la constitución de dicho conjunto, o lo que es lo mismo, la propiedad que determina a los elementos de un conjunto no debe de hacer uso del conjunto en sí. Esta propiedad puede ser algo escurridiza.

• Un conjunto no puede ser elemento de si mismo.

Definición 1 Diremos que un elemento "a" **pertenece** a un conjunto X, y lo denotaremos por $a \in X$, si a es uno de los miembros de X. Si a no es miembro de X diremos que a **no pertenece** a X y lo denotaremos por $a \notin X$.

Nota: Para que un conjunto esté correctamente definido debe de poderse determinar si un objeto pertenece o no pertenece a él de forma inequívoca.
Notación: Los conjuntos los denotaremos por letras mayúsculas mientras que los elementos serán denotados por letras minúsculas.

Ejemplos B

⋆ El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$.

⋆ El conjunto de los números naturales que son pares.

⋆ $A = \{1, 2, a\}; B = \{a, b, c\}; C = \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

⋆ $X = \{1, 2, 3, \{1, c\}, \{a\}, b\}$. En este caso, algunos de los elementos de este conjunto son a su vez conjuntos. Esto nos puede llevar a cierta confusión a la hora de saber si un elemento pertenece o no a un conjunto. Así, en este ejemplo,

$$1, b, \{1, c\} \in X, \quad \text{pero} \quad a, c, \{1\}, \{2\} \notin X$$

Definición 2 Sean X e Y dos conjuntos:
• Diremos que X es un **subconjunto** de Y, y lo representaremos por $X \subset Y$, que se leerá X contenido en Y, si todo elemento de X es elemento de Y, es decir,

$$X \subset Y \quad \iff^{*} \quad \forall a \in X, \ \Rightarrow^{\dagger} \ a \in Y$$

En caso contrario, cuando X no sea subconjunto de Y (lo que significa que hay un elemento de X que no es elemento de Y) se denotará por $X \not\subset Y$.
• Diremos que X es **igual** a Y, y lo representaremos $X = Y$, si

$$X \subset Y \text{ e } Y \subset X.$$

Denotaremos por $X \neq Y$ cuando X **no** sea **igual** que Y.
• Diremos que X está **estrictamente contenido** en Y, y lo denotaremos $X \subsetneq Y$ si

$$X \subset Y \text{ y } X \neq Y.$$

• Definimos el **conjunto vacío**, denotado por $\emptyset$, como aquél que carece de elementos.
• Definimos el **conjunto partes de** X, y lo representamos por $\mathcal{P}(X)$ como el conjunto que tiene por elementos los subconjuntos de X.

Ejemplos C

⋆ Las nociones de pertenece y contenido, aunque fáciles pueden llegar a confundirnos. Sea $X = \{1, \{1\}, \{1, a\}, \{a\}\}$. Entonces

$$1, \{a\} \in X, \quad a \notin X, \quad \{1\}, \{\{a\}\} \subset X, \quad \{1, a\} \not\subset X$$

Observar que en este ejemplo $\{1\} \in X$ y $\{1\} \subset X$.

⋆ Para $A = \{1, 2, a\}$, se tiene que

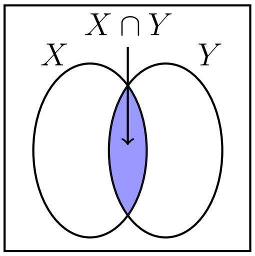
$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{a\}, \{1, 2\}, \{1, a\}, \{2, a\}, \{1, 2, a\}\}.$$

---

*Relación lógica $\iff$: establece que las proposiciones a izquierda y derecha de ella son o ambas falsas o ambas verdaderas. A veces es usada para dar una definición

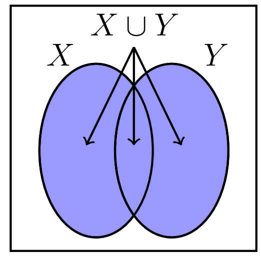
†Relación lógica $\Rightarrow$: establece que si la proposición de la izquierda es verdadera, la de la derecha también lo es

1.2. Operaciones con conjuntos



Definición 3 Dados dos conjuntos X, Y, se define la **intersección** de X con Y y se representa por $X \cap Y$ a un nuevo conjunto que tiene los elementos que están tanto en X como en Y.

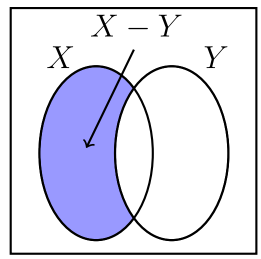
$$X \cap Y = \{z \mid z \in X \text{ y } z \in Y\}$$



Definición 4 Dados dos conjuntos X, Y, se define la **unión** de X con Y y se representa por $X \cup Y$ a un nuevo conjunto que tiene por elementos tanto los elementos de X como los de Y.

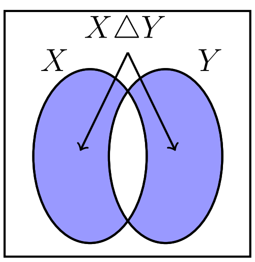
$$X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ ó } z \in Y\}$$

Nota: Dados dos conjuntos X, Y, se dice que la unión de X con Y es disjunta y se denota por $X \dot{\cup} Y$ (un punto encima de la unión) si $X \cap Y = \emptyset$.



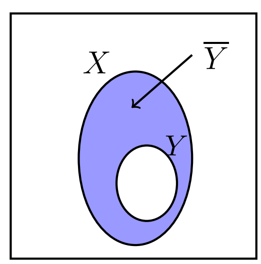
Definición 5 Dados dos conjuntos X, Y, se define la **diferencia** de X con Y y se representa por $X - Y$ al conjunto formado por los elementos de X que no están en Y. Es decir,

$$X - Y = \{z \in X \mid z \notin Y\}$$



Definición 6 Dados dos conjuntos X, Y, se define la **diferencia simétrica** de X con Y y se representa por $X \triangle Y$ al conjunto formado por los elementos de X que no están en Y junto con los de Y que no están en X.

$$X \triangle Y = (X \cup Y) - (Y \cap X) = (X - Y) \cup (Y - X)$$



Definición 7 Dados dos conjuntos X, Y, con X subconjunto de Y se define el **complemento** de X en Y y se representa por $\overline{X}$ al conjunto formado por los elementos de Y que no están en X. Es decir,

$$\overline{X} = \{z \in Y \mid z \notin X\}$$

Definición 8 Dados dos conjuntos X, Y se define el **producto cartesiano** de X e Y y se representa por $X \times Y$ como un nuevo conjunto formado por todos los pares (x, y) en donde $x \in X$ e $y \in Y$.

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

Ejemplos D Dados $A = \{1, 2, a\}$ y $B = \{a, b, c\}$ se tiene que

$$A \times B := \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (a, a), (a, b), (a, c)\}$$

Nota: Los conjuntos $X \times Y$ e $Y \times X$ son distintos siempre que $X \neq Y$.

Proposición 9 Sean X, Y, Z tres conjuntos. Entonces:

(i) Propiedad Conmutativa: $X \cup Y = Y \cup X$; $\quad X \cap Y = Y \cap X$.

(ii) Propiedad asociativa: $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$
$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$.

(iii) Propiedad distributiva: $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$
$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$
$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

(iv) Propiedad Idempotente: $X \cup X = X$; $\quad X \cap X = X$.

(v) Leyes de simplificación: $(X \cup Y) \cap X = X$; $\quad (X \cap Y) \cup X = X$.

(vi) Leyes de Morgan: supongamos que X, Y son subconjuntos de un conjunto T, entonces:

$$\overline{(X \cup Y)} = \overline{X} \cap \overline{Y}; \quad \overline{(X \cap Y)} = \overline{X} \cup \overline{Y}.$$

Demo: (i) se deduce de la definición.

(ii). Demostremos que $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$. Sea $a \in (X \cup Y) \cup Z$. Por la definición de unión, $a \in X \cup Y$ o $a \in Z$ y por tanto, $a \in X$ o $a \in Y$ o $a \in Z$. Así, $a \in X$ o $a \in Y \cup Z$ lo que implica que $a \in X \cup (Y \cup Z)$. El otro contenido es idéntico.

El resto de la demostración no tiene mayor dificultad. ■

2. Conjuntos de números

2.1. Los Números Naturales

Definición 1 Los Números Naturales aparecen por la necesidad que tiene el hombre (primitivo) tanto de contar como de ordenar una cierta cantidad de objetos.

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$

En los números naturales podemos sumar y multiplicar, pero no podemos, en la mayoría de los casos, ni restar ni dividir. Históricamente el cero no es considerado un número natural. El siguiente teorema nos muestra una propiedad muy importante de los naturales:

Teorema 2 (Principio de inducción matemática) Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:

- $1 \in S$ y
- si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$.

Se tiene que $S = \mathbb{N}$

Ejemplos A Demuestra que para todo número natural n se verifica que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Demo: Consideremos el conjunto S de los números naturales para los que la igualdad es cierta. Es claro que $1 \in S$, ya que $1 = 1^2$. Supongamos que la igualdad es cierta para n, es decir que $n \in S$ y veamos que es cierta para $n + 1$. Tenemos, por hipótesis, que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Observar que el siguiente impar de $2n - 1$ es $2n + 1$, por tanto, si sumamos en ambos lados de la igualdad $2n + 1$ obtenemos

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

es decir, que $n+1 \in S$. Por tanto aplicando el principio de inducción matemática, $S = \mathbb{N}$, lo que demuestra que la igualdad es cierta para todo número natural. ■

Teorema 3 (Principio de inducción generalizado:) Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:

- $1 \in S$ y
- si $1, 2, \ldots, n \in S$, entonces $n + 1 \in S$.

Entonces $S = \mathbb{N}$

En este punto nos separamos de la teoría axiomática de los Números Naturales (tanto la suma, el producto como el buen orden de $\mathbb{N}$ se pueden definir usando una pequeña cantidad de axiomas; a partir de ellos se pueden demostrar todas las propiedades que vamos a ver a continuación). Si quieres ver la teoría completa, la puedes encontrar en [1].

Definición 4 (Propiedades de los Números Naturales)

1. Propiedades respecto de la suma:
   a) Propiedad asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{N}$.
   b) Existencia de elemento neutro: $x + 0 = 0 + x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$.
   c) Propiedad conmutativa: $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{N}$.
2. Propiedades respecto del producto:
   a) Propiedad asociativa: $(x\, y)\, z = x\, (y\, z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{N}$.
   b) Existencia de elemento neutro: $x\, 1 = 1\, x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$.
   c) Propiedad conmutativa: $x\, y = y\, x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{N}$.
   d) Ley de simplificación: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{N}$, con $x \neq 0$, si $x\, y = x\, z$, entonces $y = z$.
3. Propiedades respecto del orden: **Los Naturales poseen un buen orden**, es decir, cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ posee elemento mínimo.
4. Propiedades conjuntas: para todo $x, y, z \in \mathbb{N}$
   a) Propiedad distributiva: $(x + y)\, z = x\, z + y\, z$.
   b) Si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$.
   c) Si $x \leq y$, entonces $xz \leq yz$.

2.2. Los Números Enteros

Definición 5 Los Números Enteros: aparecen simetrizando el conjunto de números naturales, y añadiéndoles el cero. Los denotaremos por $\mathbb{Z}$. Con este nuevo conjunto de números obtenemos la mejoría de que, ahora sí, la resta de dos números enteros es un número entero.

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Definición 6 (Propiedades de los Números Enteros)

1. Propiedades respecto de la suma:
   a) Propiedad asociativa: $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}$.
   b) Existencia de elemento neutro: $x+0 = 0+x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{Z}$.
   c) Existencia de elemento opuesto: para todo $x \in \mathbb{Z}$ existe $-x \in \mathbb{Z}$ tal que
   $$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$
   d) Propiedad conmutativa: $x+y = y+x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$.
2. Propiedades respecto del producto:
   a) Propiedad asociativa: $(x\,y)\,z = x\,(y\,z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}$.
   b) Existencia de elemento neutro: $x\,1 = 1\,x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{Z}$.
   c) Propiedad conmutativa: $x\,y = y\,x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$.
   d) Ley de simplificación: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}$, con $x \neq 0$, si $x\,y = x\,z$, entonces $y = z$.
3. Propiedades conjuntas:
   a) Propiedad distributiva: $(x+y)\,z = x\,z + y\,z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}$.
4. Propiedades respecto del orden: para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$
   a) Si $x \leq y$, entonces $x+z \leq y+z$.
   b) Si $x \leq y$ y $z \geq 0$, entonces $x\,z \leq y\,z$.
   c) Si $x \leq y$, y $z \leq 0$, entonces $x\,z \geq y\,z$.

Nota: Observar que normalmente los elementos de $\mathbb{Z}$ no poseen inverso.

Definición 7 Se define el **valor absoluto** de un número entero $x \in \mathbb{Z}$ y se representa por $|x|$ como:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposición 8 (Algoritmo de la división.) Dados dos números enteros $x, y \in \mathbb{Z}$ con $y > 0$ existen $c, r \in \mathbb{Z}$ (únicos), tales que $x = cy + r$ con $0 \leq r < y$.

Definición 9 Con la notación del teorema anterior se dice que x es el **dividendo**, y el **divisor**, c el **cociente** y r el **resto**.

Definición 10 Sean x, y dos números enteros. Se dice que y divide a x y se representa ${}^{y}|_{x}$ si existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $x = cy$.

Definición 11 Se dice que un número entero p es **primo** si $|p| \neq 1$ y sólo es divisible por $\{1, -1, p, -p\}$.

Definición 12 (Teorema de Factorización) Dado un número entero n con $|n| > 1$ existen unos únicos $p_1 < \cdots < p_k$ primos y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que $n = \pm p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$.

2.3. Los Números Racionales.

Ampliando el conjunto de los números Enteros a los Racionales, $\mathbb{Q}$, conseguimos encontrar inversos respecto del producto (naturalmente salvo para el cero). Por lo que en $\mathbb{Q}$ vamos a poder sumar, restar, multiplicar y dividir (por números no nulos).

$$\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$$

Tenemos que la suma y el producto de números Racionales es:

$$\begin{array}{rcl} \text{La suma:} & \frac{a}{b} + \frac{c}{d} & := \frac{ad+bc}{bd}. \\ \text{El producto:} & \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} & := \frac{ac}{bd}. \end{array}$$

Definición 13 (Propiedades de los Números Racionales)

1. Propiedades respecto de la suma:

   a) Propiedad asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$.

   b) Existencia de elemento neutro: $x + 0 = 0 + x = x \quad \forall\ x \in \mathbb{Q}$.

   c) Existencia de elemento opuesto: para todo $x \in \mathbb{Q}$ existe $-x \in \mathbb{Q}$ tal que

   $$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

   d) Propiedad conmutativa: $x + y = y + x \quad \forall\ x, y \in \mathbb{Q}$.

2. Propiedades respecto del producto:

   a) Propiedad asociativa: $(x\,y)\,z = x\,(y\,z) \quad \forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$.

   b) Existencia de elemento neutro: $x\,1 = 1\,x = x \quad \forall\ x \in \mathbb{Q}$.

   c) Existencia de elemento inverso: para todo $0 \neq x \in \mathbb{Q}$ existe $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ tal que $x\,x^{-1} = x^{-1}\,x = 1$.

   d) Propiedad conmutativa: $x\,y = y\,x \quad \forall\ x, y \in \mathbb{Q}$.

3. Propiedades conjuntas:

   a) Propiedad distributiva: $(x + y)\,z = x\,z + y\,z \quad \forall\ x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Nota: A un conjunto con dos operaciones que verifique todas las condiciones anteriores se le denomina **Cuerpo**. Por tanto $\mathbb{Q}$ es un cuerpo.

4. Propiedades respecto del orden: para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$

   a) Si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$.

   b) Si $x \leq y$ y $z \geq 0$, entonces $x\,z \leq y\,z$.

   c) Si $x \leq y$, y $z \leq 0$, entonces $x\,z \geq y\,z$.

2.4. Los Números Reales.

No obstante, nos encontramos con operaciones que no se pueden realizar dentro del conjunto de los números Racionales. Así, $\sqrt{2}$ no es un número Racional.

Esto nos lleva a un resultado que no sólo se creía cierto, sino que se consideró evidente hasta tiempos posteriores a Pitágoras: dadas dos longitudes a y b

longitud a

longitud b

existe una tercera longitud c ¿ − ? tal que tanto a como b son múltiplos de c?
Nota: La respuesta es que NO, ya que es falsa para 1 y $\sqrt{2}$.

La construcción de los números Reales a partir de los números Racionales no es fácil, por lo que la vamos a omitir. Para nosotros los número Reales no será más que el conjunto de todas las medidas posibles. Denotemos por $\mathbb{R}$ al conjunto de números Reales con la suma y el producto usual. En $\mathbb{R}$ no solo tenemos que podemos sumar, restar, multiplicar y dividir (por números no nulos), sino que podemos hacer raíces de cualquier orden sobre número positivos y raíces de orden impar sobre cualquier Real.

Definición 14 (Propiedades de los Números Reales) *1. Propiedades respecto de la suma:*

   a) *Propiedad asociativa:* $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

   b) *Existencia de elemento neutro:* $x + 0 = 0 + x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

   c) *Existencia de elemento opuesto: para todo* $x \in \mathbb{R}$ *existe* $-x \in \mathbb{R}$ *tal que*

   $$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

   d) *Propiedad conmutativa:* $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

2. Propiedades respecto del producto:

   a) *Propiedad asociativa:* $(x\,y)\,z = x\,(y\,z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

   b) *Existencia de elemento neutro:* $x\,1 = 1\,x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

   c) *Existencia de elemento inverso: para todo* $0 \neq x \in \mathbb{R}$ *existe* $x^{-1} \in \mathbb{R}$ *tal que* $x\,x^{-1} = x^{-1}\,x = 1$.

   d) *Propiedad conmutativa:* $x\,y = y\,x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

3. *Propiedades conjuntas:*

    a) *Propiedad distributiva:* $(x + y)\, z = x\, z + y\, z \quad \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

4. *Propiedades respecto del orden: para todo* $x, y, z \in \mathbb{R}$

    a) *Si* $x \leq y$, *entonces* $x + z \leq y + z$.

    b) *Si* $x \leq y$ *y* $z \geq 0$, *entonces* $x\, z \leq y\, z$.

    c) *Si* $x \leq y$, *y* $z \leq 0$, *entonces* $x\, z \geq y\, z$.

Nota: $\mathbb{R}$ también es un cuerpo.

2.5. Los Números Complejos.

Nos encontramos todavía con ciertas "deficiencias" en el conjunto de los números Reales. Por ejemplo no toda ecuación polinómica tiene solución en $\mathbb{R}$. Como caso particular, $X^2 + 1 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, o lo que es prácticamente lo mismo, no existe la raíz cuadrada de ningún número negativo.

Vamos a construirnos un nuevo conjunto de números en donde estas ecuaciones tengan solución: Los Números Complejos. Denotemos por i un número "imaginario" que verifique que $i^2 = -1$ y sea $\mathbb{C}$ el conjunto:

$$\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$ diremos que a es la **parte real** de z mientras que b es su **parte imaginaria**. Vamos a poder definir una suma y un producto en $\mathbb{C}$:

- La suma se define: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- El producto se define: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Nota: observar que no son suma y productos arbitrarios, ya que la suma se realiza "aplicando la propiedad distributiva y conmutativa" y el producto "aplicando además el hecho de que $i^2 = -1$".

Nota: Todo número Real lo podemos ver como un número Complejo, ya que todo $a \in \mathbb{R}$ puede verse como $a + 0i \in \mathbb{C}$. De ahora en adelante siempre veremos los números Reales como un subconjunto de los Complejos.

Antes de ver las propiedades que verifican los números Complejos veamos algunas definiciones y propiedades.

Definición 15 *Sea* $z = a + bi \in \mathbb{C}$. *Se define el* ***conjugado*** *de* z *y se denota por* $\overline{z}$ *como* $\overline{z} = a - bi$.

Definición 16 *Sea* $z = a + bi \in \mathbb{C}$. *Se define el* ***módulo*** *de* z, *y se representa por* $|z|$ *como el número Real,* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Nota: Observar que un número Complejo es cero si y sólo si su módulo es cero, es decir: dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$

$$z = 0 \iff |z| = 0.$$

Lema 17 *Sea $z \in \mathbb{C}$ un número Complejo. Entonces $z\overline{z} = |z|^2$.*

Demo. Realmente sólo tenemos que hacer el producto:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = (a^2 + b^2) + 0i = |z|^2$$

por lo que queda demostrado el teorema. ■

Lema 18 *Sea $0 \neq z = a + bi \in \mathbb{C}$ un número Complejo. Entonces el inverso de z es $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Es decir,*

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Nota: Ya sabemos sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos:

$$\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi)(c + di)^{-1} = (a + bi)\left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i\right).$$

Definición 19 (Propiedades de los Números Complejos)

1. Propiedades respecto de la suma:

   a) Propiedad asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{C}$.

   b) Existencia de elemento neutro: $x + 0 = 0 + x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{C}$.

   c) Existencia de elemento opuesto: para todo $x \in \mathbb{C}$ existe $-x \in \mathbb{C}$ tal que

   $$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

   d) Propiedad conmutativa: $x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}$.

2. Propiedades respecto del producto:

   a) Propiedad asociativa: $(x\,y)\,z = x\,(y\,z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{C}$.

   b) Existencia de elemento neutro: $x\,1 = 1\,x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{C}$.

   c) Existencia de elemento inverso: para todo $0 \neq x \in \mathbb{Q}$ existe $x^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $x\,x^{-1} = x^{-1}\,x = 1$.

   d) Propiedad conmutativa: $x\,y = y\,x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{C}$.

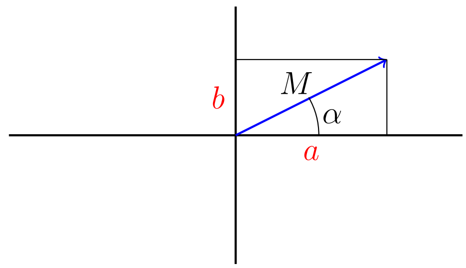
3. Propiedades conjuntas:

   a) Propiedad distributiva: $(x + y)\,z = x\,z + y\,z \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{C}$.

Nota: Los números Complejos también son un **Cuerpo**.
Nota: En los números Complejos no hemos dado una noción de orden, por lo que no podremos decir si un número Complejo es mayor o menor que otro.

2.6. La forma polar de un número Complejo

Definición 20 Vamos a usar el hecho de que todo número Complejo, $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se puede representar como un vector de $\mathbb{R}^2$, el plano Real, en donde a es la coordenada en el eje de coordenadas y b es la coordenada en el eje de abscisa.



Así, z queda determinado por el módulo de este vector M, que llamaremos módulo de z y el ángulo respecto del eje de coordenadas α, al que llamaremos el argumento de z.

Definición 21 Cuando un número Complejo z lo demos a partir de su modulo, $|z|$ y argumento α, diremos que z está en forma polar, y lo notaremos por $z = M_\alpha$. En caso contrario, cuando demos un número Complejo en la forma $z = a+bi$ diremos que z está en forma cartesiana.

Nota: Es fácil, usando nociones básicas de trigonometría, pasar de la forma polar de un número Complejo a su forma cartesiana y viceversa.

$$\begin{aligned} z = a + bi, \quad &\Rightarrow \quad z = |z|_{\mathrm{ArcTan}\frac{b}{a}} \\ z = M_\alpha \quad &\Rightarrow \quad z = M\mathrm{Cos}\alpha + M\mathrm{Sen}\alpha\ i \end{aligned}$$

Nota: Cuando nos encontramos con números polares puros, es decir, cuando la parte Real del número Complejo sea cero, tenemos que calcular la arcotangente de “infinito” ($\mathrm{ArcTan}\frac{b}{0}$) lo que será interpretado como el ángulo de noventa grados si b es positivo y el ángulo de 270 grados si b es negativo.

Nota: Un número Complejo en forma polar tiene más de una representación, ya que para todo $z = M_\alpha$, se tiene que $z = M_{\alpha+360} = M_{\alpha+360k}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ya que en su representación en el plano Real una o más vueltas (sumar o restar un número de veces 360 grados al argumento) no afecta a su representación. Por otro lado, por definición, M es un número Real positivo.

Nos encontramos con que va a ser más fácil multiplicar números en forma polar que en forma cartesiana.

Proposición 22 *Sean $z = M_\alpha$ y $M'_{\alpha'}$ dos números complejos. Entonces el producto de z por z' en forma polar sigue la formula,*

$$M_\alpha \cdot M'_{\alpha'} = MM'_{(\alpha+\alpha')}$$

Es decir, se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.

Demo:

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= (M\text{Cos}\alpha + M\text{Sen}\alpha\ i) \cdot (M'\text{Cos}\alpha' + M'\text{Sen}\alpha'\ i) \\ &= (MM'\text{Cos}\alpha\ \text{Cos}\alpha' - MM'\text{Sen}\alpha\ \text{Sen}\alpha') \\ &+ (MM'\text{Cos}\alpha\ \text{Sen}\alpha' - MM'\text{Cos}\alpha'\ \text{Sen}\alpha)i \\ &= MM'\text{Cos}(\alpha+\alpha') + MM'\text{Sen}(\alpha+\alpha')i = MM'_{(\alpha+\alpha')} \end{aligned}$$

■

Tenemos entonces que es muy fácil calcular potencias de un número complejo (siempre que este en forma polar):

Lema 23 *Sea $z = M_\alpha$ un número complejo y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $z^n = (M^n)_{n\alpha}$.*

Nos encontramos también que el calculo de raíces de cualquier orden en números complejos no es muy complicado. Antes una definición.

Definición 24 *Sea z un número complejo. Se define una raíz n-esima de z y se representa por $\sqrt[n]{z}$ como cualquier complejo $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^n = z$.*

Lema 25 *Sea $z = M_\alpha$ un número complejo y sea $n \in \mathbb{N}$ un natural. Entonces z posee n raíces n-esimas que son:*

$$w_1 = \sqrt[n]{M}_{\frac{\alpha}{n}},\ \ \sqrt[n]{M}_{\frac{\alpha}{n}+\frac{360}{n}},,\ \ \sqrt[n]{M}_{\frac{\alpha}{n}+2\cdot\frac{360}{n}}, \ldots, \sqrt[n]{M}_{\frac{\alpha}{n}+(n-1)\cdot\frac{360}{n}}$$

Nota: En particular,

⋆ las raíces cuadradas de un complejo M_α son $\sqrt{M}_{\frac{\alpha}{2}}$ y $\sqrt{M}_{\frac{\alpha}{2}+180}$.

⋆ Las raíces cubicas de M_α son $\sqrt[3]{M}_{\frac{\alpha}{3}}$, $\sqrt[3]{M}_{\frac{\alpha}{3}+120}$ y $\sqrt[3]{M}_{\frac{\alpha}{3}+240}$.

⋆ Las raíces cuartas de M_α son $\sqrt[4]{M}_{\frac{\alpha}{4}}$, $\sqrt[4]{M}_{\frac{\alpha}{4}+90}$, $\sqrt[4]{M}_{\frac{\alpha}{4}+180}$ y $\sqrt[4]{M}_{\frac{\alpha}{4}+270}$.

Ejemplos B *Las raíces n-esimas de uno, es decir, $\sqrt[n]{1}$ son:*

$$\{1_{\frac{360}{n}}, 1_{2\frac{360}{n}}, \ldots, 1_{(n-1)\frac{360}{n}}\}$$

*Este conjunto de números es importante en matemáticas, cada uno de sus elementos se denomina una **raíz n-ésima de la unidad**.*

***Nota:** Si denoto por $\gamma = 1_{\frac{360}{n}}$, tenemos que $\gamma^k = 1_{k\frac{360}{n}}$, por lo que el conjunto de las raíces n-ésimas de la unidad es $\{\gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^n = 1\}$.*

3. Resumen operaciones con complejos

Propiedades 1 (En forma cartesiana) Sean $z = a + bi$, $z' = c + di$ dos números complejos. Entonces:

La suma	$z + z' = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$.
El producto	$z \cdot z' = (a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bd)i$.
El inverso	$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$.
El cociente	$\frac{z}{z'} = (a+bi) \cdot (\frac{c}{c^2+d^2} + \frac{-d}{c^2+d^2}i) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.
La potencia	¿?
La raíz	¿?

Propiedades 2 (En forma Polar) Sean $z = M_\alpha$, $z' = M'_{\alpha'}$ dos números complejos. Entonces:

La suma	¿?
El producto	$z \cdot z' = M_\alpha \cdot M'_{\alpha'} = MM'_{\alpha+\alpha'}$.
El inverso	$\frac{1}{z} = M_{-\alpha}$.
El cociente	$\frac{z}{z'} = MM'_{\alpha-\alpha'}$.
La potencia	$z^n = (M_\alpha)^n = M^n_{n\alpha}$.
La raiz	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{M_\alpha} = \sqrt[n]{M}_\alpha = \sqrt[n]{M}_{\frac{\alpha}{n}}, \sqrt[n]{M}_{\frac{\alpha}{n}+\frac{360}{n}}, \ldots, \sqrt[n]{M}_{\frac{\alpha}{n}+(n-1)\frac{360}{n}}$.

4. Soluciones de ecuaciones polinómicas en $\mathbb{C}$

Lema 1 Dada una ecuación polinómica de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ con $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, tenemos que sus soluciones son:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Cuando $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, y sólo disponíamos de los números Reales nos encontrábamos que cuando $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación "no tenía solución". Ahora, ya podemos trabajar con los números Complejos, por lo que:

⋆ Caso Real con dos raíces distintas: Si $b^2 - 4ac > 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

⋆ Caso Real con una raíz doble: Si $b^2 - 4ac = 0$

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

⋆ Caso Complejo con dos raíces conjugadas: Si $b^2 - 4ac < 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a} i.$$

Nos encontramos que una ecuación polinómica de grado dos sobre $\mathbb{C}$ tiene dos soluciones (o una única solución doble) este resultado no es sólo valido para ecuaciones polinómicas de grado dos:

Teorema 2 (Teorema fundamental del álgebra) Una ecuación polinómica sobre $\mathbb{C}$ de grado n:

$$a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{con} \quad a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0$$

posee exactamente n soluciones. ■

No obstante, las ecuaciones de grado superior a dos son algo más difíciles de resolver. Pero todavía, sin mucho esfuerzo, podemos resolver algunas más.

5. Aplicaciones

5.1. Definiciones básicas

Definición 1 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Se define una **aplicación** f de X en Y, y se representa por $f : X \to Y$, como un subconjunto $F \subset X \times Y$ tal que para todo $x \in X$ existe un único $y \in Y$ con $(x, y) \in F$

$$\forall x \in X \quad \exists !\ y \in Y \quad | \quad (x, y) \in F^{\ddagger}$$

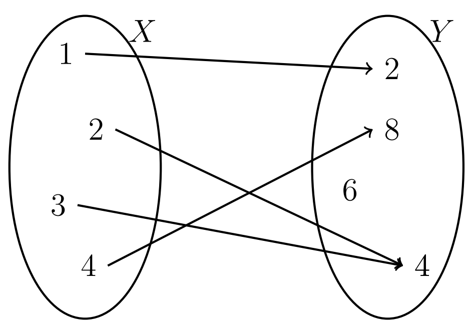
Este elemento y no es más que lo que usualmente llamamos $f(x)$. Al conjunto X se le denomina el **dominio** de f y se representa por $\mathrm{Dom}(f)$. Al conjunto Y se le denomina el **codominio** de f y se representa por $\mathrm{CoDom}(f)$.

Nota: Normalmente daremos una aplicación dando una regla que asigna a cada elemento de X un y sólo un elemento de Y.

Nota: Cuando se trabaja con aplicaciones reales de variable real, es decir, aplicaciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, normalmente sa las llama funciones. Estas funciones vienen representadas por expresiones algebraicas tales como $f(x) = \frac{1}{x}$ (como puede verse la función f no tiene sentido en 0, ¿que es $f(0)$? En estos casos se entiende que el dominio de f es el conjuntos de naturales para los que la expresión tiene sentido, aunque se represente por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Por ejemplo, el dominio de la función anterior es:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Nota: Podemos representar aplicaciones a partir de diagramas de Venn:



En este caso la aplicación f tiene dominio $X = \{1, 2, 3, 4\}$, codominio $Y = \{2, 4, 6, 8\}$ y consiste en el subconjunto $F = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 8)\} \subset X \times Y$. Que puede ser representado por $f : X \to Y$ con $f(x) = -8 + 16x - 7x^2 + x^3$.

Ejemplos A

⋆ Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = 2n + 1$. En este caso la aplicación es el subconjunto $\{(n, 2n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

⋆ Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y y_0 un elemento de Y. La **aplicación constante**: $f_{y_0} : X \to Y$ definida por $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$. En este caso la aplicación es el subconjunto $\{(x, y_0) \mid x \in X\}$.

[‡] $\forall$ para todo; $\exists$ existe; ! un único; | tal que. En conjunto esta formula centrada se lee: para todo x perteneciente a X existe un único y perteneciente a Y tal que (x, y) pertenece a F

⋆ La **aplicación identidad**: $\mathrm{Id}_X : X \to X$ definida por $\mathrm{Id}_X(x) = x$ para todo $x \in X$. En este caso la aplicación es el subconjunto $\{(x, x) \mid x \in X\}$.

⋆ Dada una aplicación $f : X \to Y$ y dado X' un subconjunto de X tenemos la **restricción de** f a X' como: $f|_{X'} : X' \to Y$ definida por $f|_{X'}(x) = f(x)$.

⋆ Dada una aplicación $f : X \to Y$ y dado Y' un subconjunto de Y con $\mathrm{Im}(f) \subset Y'$ tenemos **restricción de** f a Y' como: $f|_{Y'} : X \to Y'$ definida por $f|_{Y'}(x) = f(x)$.

Definición 2 Diremos que dos aplicaciones f, g son **iguales** si $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$, $\mathrm{CoDom}(f) = \mathrm{CoDom}(g)$ y para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$ se tienen que $f(x) = g(x)$ (es decir, el subconjunto que las define es el mismo).

Definición 3 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación.

• Dado un subconjunto A de X se define la imagen de A por f y se denota por $f(A)$ como:

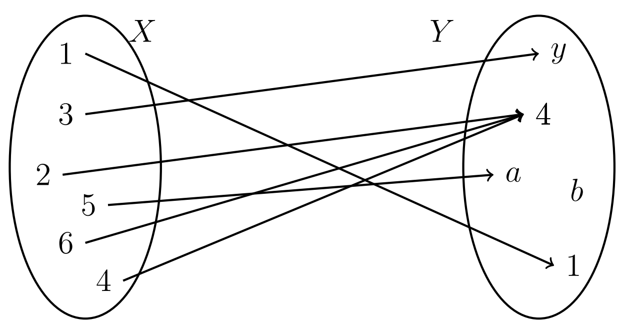
$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \subset Y$$

Se define la **imagen** de f como $\mathrm{Im}(f) := f(X)$.

• Dado un subconjunto B de Y se define la imagen inversa de B por f y se denota por $f^{-1}(Y')$ como:

$$f^{-1}(Y') := \{x \in X \mid f(x) \in Y'\} \subset X$$

Ejemplos B *Consideremos la aplicación:*



Tenemos entonces que

$$\begin{array}{lll} f(\{1,2,3\}) = \{1,4,y\}, & f(\{2,4,6\}) = \{4\}, & f(\{4,5\}) = \{4,a\} \\ f^{-1}(\{b\}) = \emptyset, & f^{-1}(\{4\}) = \{2,4,6\}, & f^{-1}(\{a,4,y\}) = \{2,3,4,5,6\} \end{array}$$

Definición 4 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. Diremos que f es:

• **Inyectiva**: si $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$ (un elemento de Y no puede ser imagen de dos elementos de X).

• **Sobreyectiva**: si para todo $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $f(x) = y$ (todo elemento de Y es imagen de algún elemento de X).

• **Biyectiva**: si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplos C

⋆ La aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$ es biyectiva.

⋆ La aplicación $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = 2x + 1$ es sólo inyectiva. No existe ningún natural n tal que $f(n) = 4$.

⋆ La aplicación $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva. $h(2) = h(-2)$ por lo que no es inyectiva y no existe ningún elemento $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -1$, por lo que no es sobreyectiva.

5.2. Composición de aplicaciones

Definición 5 Sean X, Y, Z tres conjuntos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos aplicaciones. Se define la **composición** de f con g y se representa por $g \circ f$ como la aplicación

$$g \circ f : X \to Z \quad \text{definida por } g \circ f(x) := g(f(x)) \quad \forall\, x \in X$$

Nota: Cuando trabajamos con aplicaciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (es decir, funciones) por el dominio de la composición se entenderá el conjunto en donde f, g y la composición $g \circ f$, tienen sentido. Así, si consideramos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas pro $f(x) = \frac{1}{x}$ tenemos que el dominio de f es $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Por otro lado $f \circ f(x) = \frac{1}{1/x} = x$ (que en principio no tiene problemas de definición para ningún número Real, no obstante, el dominio de $f \circ f$ es $\mathrm{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Teorema 6 Sean X, Y, Z y T cuatro conjuntos no vacíos y consideremos

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z, \quad h : Z \to T$$

tres aplicaciones. Entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Demo: Es una mera comprobación: Dado cualquier $x \in X$ se tiene que,

$$h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$
$$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

Luego las aplicaciones $h \circ (g \circ f)$ y $(h \circ g) \circ f$ coinciden para todo $x \in X$, lo que demuestra que son la misma aplicación, ver definición 2 (Pag. 15). ■

Nota: La composición de aplicaciones no tiene que verificar la propiedad conmutativa. Es decir, dado X un conjunto no vacío y dos aplicaciones $f, g : X \to X$ no tiene que verificarse que $f \circ g = g \circ f$.

Lema 7 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación.

(i) Si Id_Y denotan la aplicación identidad en Y, entonces $\mathrm{Id}_Y \circ f = f$.

(ii) Si Id_X denotan la aplicación identidad en X, entonces $f \circ \mathrm{Id}_X = f$.

Demo: Los dos apartados son obvios. ■

Proposición 8 Sean X, Y y Z tres conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ dos aplicaciones. Entonces:

(i) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

(ii) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva. (ejercicio)

(iii) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva. (ejercicio)

(iv) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

(v) Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

Demo:

(i). Supongamos que f y g son dos aplicaciones inyectivas y consideremos $x_1, x_2 \in X$ tales que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ (tenemos que demostrar, para ver que $g \circ f$ es inyectiva, que $x_1 = x_2$). Por definición

$$g(f(x_1)) = g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) = g(f(x_2))$$

por tanto, como g es inyectiva, $f(x_1) = f(x_2)$ y como f es inyectiva $x_1 = x_2$.

(iv). Supongamos que $g \circ f : X \to Z$ es una aplicación sobreyectiva y veamos que $g : Y \to Z$ es también sobreyectiva. Dado $z \in Z$ tenemos que encontrar un $y \in Y$ tal que $g(y) = z$. Como $g \circ f$ es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$. Por tanto, $y = f(x)$ es el elemento que buscamos:

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = z$$

(v) es corolario de (i) y (ii). ∎

Teorema 9 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) f es biyectiva.

(ii) Existe una aplicación $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ y $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

Es más, g es única, que denotaremos por f^{-1}. En este caso se dice que f es **inversible** con inversa f^{-1}.

Proposición 10 Sean X, Y y Z tres conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos aplicaciones biyectivas. Entonces $g \circ f$ es biyectiva, por tanto inversible con inversa,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Demo: Comprobemos simplemente que $f^{-1} \circ g^{-1}$ es la inversa de $g \circ f$. Tendremos entonces que la composición de aplicaciones biyectivas es biyectiva por el teorema 9 (Pag. 17).

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_Y \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X$$
$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_X \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_Y .$$

Lo que demuestra la proposición. ∎

Nota: Dados dos conjuntos no vacíos X, Y y una aplicación $f : X \to Y$ NO SE DEBE CONFUNDIR la imagen inversa de un subconjunto B de Y por f, denotado por $f^{-1}(B)$, con la inversa de la aplicación (QUE SÓLO EXISTIRÁ SI f ES BIYECTIVA).

6. Ejercicios del Tema

1 Sea $X = \{1,2,3,a,b,c,\alpha,\beta,\gamma,\{1,a\},\{4\},\{a,b,c\}\}$. Di si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

$$\begin{array}{ccccc} a \in X & \{1,a\} \in X & \{1,a\} \subset X & 4 \in X & \{a,b,c\} \subset X \\ 3 \subset X & \{\alpha,\{4\}\} \subset X & \{4\} \subset X & X \subset X & \{a,b,c\} \in X \end{array}$$

2 Di si los siguientes son conjuntos. Caso de ser conjuntos, da una descripción alternativa de ellos: $\boxed{*}$

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{n}{m} \text{ con } n, m \in \mathbb{N}, m > 100\}$
- $\{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{n}{m} \text{ con } n, m \in \mathbb{N}, m = 3\}$

3 Sea X un conjunto y A, B y C tres subconjuntos de X. Demuestra que si $A \cap C = B \cap C$ y $A \cup C = B \cup C$ entonces $A = B$. $\boxed{*}$

4 Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una aplicación. Demuestra que para todo par de subconjuntos $A, B \subset X$,

(a) Si $A \subset B$, entonces $f(A) \subset f(B)$. (b). $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(d) Da un ejemplo que muestre que $f(A \cap B)$ no tiene por qué ser igual a $f(A) \cap f(B)$.

5 Sean X, Y y Z tres conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ dos aplicaciones. Demuestra:

1. Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
2. Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva. ¿Será g inyectiva?

6 Sean X, Y y Z tres conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to X$ tres aplicaciones tales que $h \circ g \circ f = \mathrm{Id}_X$, $f \circ h \circ g = \mathrm{Id}_Y$, $g \circ f \circ h = \mathrm{Id}_Z$ Demuestra que f, g y h son biyectivas.

7 Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

8 Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

9 Realiza las siguientes operaciones:

$$\sqrt{-25} + \sqrt{36} - \sqrt{-16} + \sqrt{-1} - \sqrt{-49}, \quad \sqrt[5]{\frac{32}{i}}, \quad \sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}$$

10 Calcula

$$(-i - \frac{1}{i})^{1024}, \quad (3 - 2i)^5$$

11 Realiza las siguientes operaciones:

$$(2+3i)(5-4i), \quad \sqrt[5]{1+2i}, \quad \sqrt[4]{-1}, \quad \frac{5+10i}{4-3i}$$

12 Calcula $(1+i)^{1000}$.

13 Encuentra las soluciones de la ecuación $iX^4 + (2+i)X^2 + (1+i) = 0$.

14 Encuentra las soluciones de las ecuaciones

$$X^4 + 16 = 0,\ X^6 + 32X = 0,\ X^3 + 2X^2 + X = 0$$

15 Da la forma polar y cartesiana de los números complejos que han aparecido en los ejercicios anteriores.

16 Calcula el número complejo que verifica que sumado son su inverso da la unidad.

17 Halla el valor de a sabiendo que la expresión $(a+6i)(3+2i)$ corresponde a un número complejo imaginario puro.

18 Halla las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$ para los siguientes pares de funciones:

- $f(x) = 2x,\ g(x) = x+3$
- $f(x) = \sqrt{x+3},\ g(x) = x+3$
- $f(x) = \frac{x+2}{3-x},\ g(x) = \sqrt{x}$

19 ¿Cuál es el dominio de la función compuesta $g \circ f$?

20 ¿Explica razonadamente la relación entre el dominio de $\frac{f(x)}{g(x)}$ y los dominios de $f(x)$ y $g(x)$?

21 Aplica los resultados de los dos problemas anteriores al cálculo de los dominios de $\frac{f}{g}$ y $g \circ f$ siendo $f(x) = \frac{x+2}{3-x}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

Capítulo 2

Funciones Reales

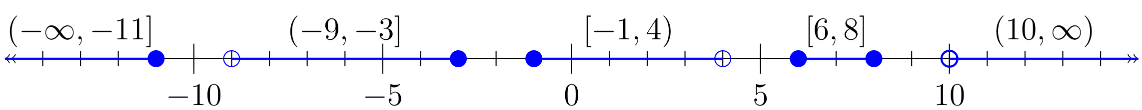
- En este tema vamos a estudiar las propiedades mas comunes de las funciones reales, como puede ser crecimiento decrecimiento, máximos y mínimos, acotación, etc.
- Estudiaremos las funciones reales más comunes (que serán usadas en Ciencias ambientales). Estudiaremos su gráfica así como sus propiedades más importantes.
- Estudiaremos como afectan las transformaciones elementales a este tipo de funciones.
- Veremos las funciones inversas de alguna de estas funciones y estudiaremos su gráfica.

1. Conceptos Básicos.

La descripción de la mayoría de los fenómenos (físicos, biológicos, económicos, ambientales, etc) que evoluciona con respecto al tiempo se estudian mediante el concepto de función. Así, la noción de función (normalmente denotada por $f(t)$ cuando depende del tiempo) nos va a permitir hacer un estudio profundo, sacando conclusiones relevantes, de ciertos hechos si conocemos como van evolucionando estos a través del tiempo (si conocemos la función que describe su comportamiento).

Definición 1 Recordamos que dados dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se definen los siguientes intervalos:
• El intervalo cerrado $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
• El intervalo abierto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
• El intervalo $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$. • El intervalo $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.
Los intervalos infinitos:
• El intervalo $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$. • El intervalo $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.
• El intervalo $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$. • El intervalo $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$.

Ejemplos A Algunos ejemplos de intervalos están representados en el siguiente dibujo:



Vamos a empezar repasando funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Nos centraremos en el estudio de las funciones más comunes.

Definición 2 Recordamos que dados dos conjuntos no vacíos X e Y. Se define una **aplicación** f de X en Y, y se representa por $f : X \to Y$, como un subconjunto $F \subset X \times Y$ tal que para todo $x \in X$ existe un único $y \in Y$ con $(x, y) \in F$

$$\forall x \in X \quad \exists!\ y \in Y \quad | \quad (x, y) \in F$$

Este elemento y no es más que lo que usualmente llamamos $f(x)$. Normalmente daremos una aplicación dando una regla que asigna a cada elemento de X un y sólo un elemento de Y.

Nota: Las aplicaciones definidas en conjuntos numéricos, digamos $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ se las suele llamar funciones.

Ejemplos B Normalmente las funciones se definen dando una regla de definición. En este caso se entenderá que el dominio de una función, digamos real, f es el conjunto de elementos de $\mathbb{R}$ en donde dicha regla tiene sentido: Definiremos una función $f : D \to \mathbb{R}$ siendo D el dominio de f, por ejemplo:

- ⋆ Si consideramos la función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$ tenemos que f manda a cada elemento no nulo de $\mathbb{R}$ al elemento $1/x$. $f(0)$ no queda definido (ya que no tiene sentido). Por tanto el Dominio de f es $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
- ⋆ Si consideramos la función $\mathrm{sen} : D \to \mathbb{R}$, la función seno, tenemos que está definida para todo $\mathbb{R}$ por lo que $\mathrm{Dom}(\mathrm{sen}(x)) = \mathbb{R}$.
- ⋆ Si consideramos la función $\mathrm{Ln} : D \to \mathbb{R}$, el logaritmo neperiano en $\mathbb{R}$, tenemos que está definido en todos los valores reales estrictamente positivos, por lo que $\mathrm{Dom}(\mathrm{Ln}(x)) = \mathbb{R}^+$.

Por tanto, hay dos conceptos importante asociado a la noción de función, su regla de definición y su dominio (que suele ser el mayor conjunto en donde dicha regla tiene sentido).

En la siguiente sección vamos a introducir algunas funciones reales de variable real que nos serán útiles a lo largo del curso. Junto con las funciones iremos definiendo ciertas propiedades que pueden verificar dichas funciones. Así como daremos su dominio de definición.

2. Las funciones polinómicas

Definición 1 Las **funciones polinómicas** tienen la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

en donde $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. El dominio de $p(x)$ es $Dom(p(x)) = \mathbb{R}$. Se define el **grado del polinomio** $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ con $a_n \neq 0$ y se representa por $\deg(p(x))$ como $\deg(p(x)) = n$. El coeficiente de grado cero de f se denomina el **termino independiente**.

Propiedades 2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es

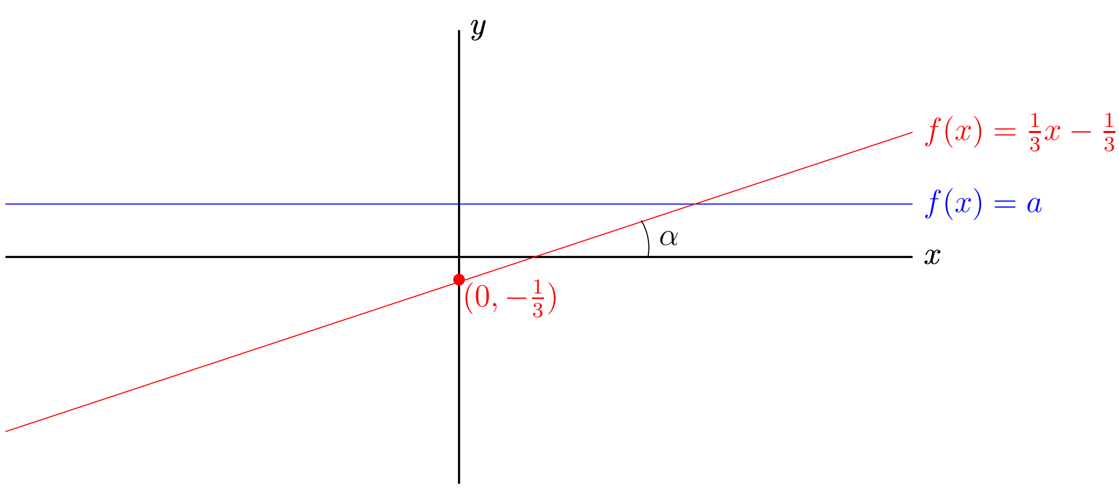
- **creciente** si para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ se tiene que $f(x) \leq f(y)$.
- **estrictamente creciente** si para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ se tiene que $f(x) < f(y)$.
- **decreciente** si para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ se tiene que $f(x) \geq f(y)$.
- **estrictamente decreciente** si para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ se tiene que $f(x) > f(y)$.

Nos encontramos con varios tipos interesantes de funciones polinómicas:
★ Las **funciones constantes** $f(x) = a$ con $a \in \mathbb{R}$, o los polinomios de grado cero. Estas funciones son crecientes y decrecientes (no estrictas).
★ Las **funciones afines** $f(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ (las rectas en el plano), o los polinomios de grado uno. Al coeficiente a se le denomina la tangente de la recta y corresponde exactamente a la tangente del ángulo que forma el eje $\overline{OX}$ con la recta f, es decir, $a = Tan(\alpha)$. Por otro lado, es claro que b (el termino independiente) se corresponde con el corte de $f(x)$ en el eje $\overline{OY}$ (en nuestro caso, el punto $(0, -\frac{1}{3})$. Estas función es estrictamente creciente si a es positivo y estrictamente decreciente si a es negativo (en toda la recta real).

Nota: Los siguientes dibujos son ejemplos de gráficas de las funciones anteriores. Matemáticamente la gráfica de una función $f : D \to \mathbb{R}$ consiste en los puntos

$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D\}$$

La gráfica de una función f contiene toda la información que nos puede proporcionar f de una forma visual (y muy clara), con lo que se tiene que estar habituado a reconocer y extraer conclusiones de ellas.



Ejemplos A *Las funciones afines o polinomios de grado 1 aparecen en todos aquellos procesos en donde las magnitudes sean proporcionales, por ejemplo:*

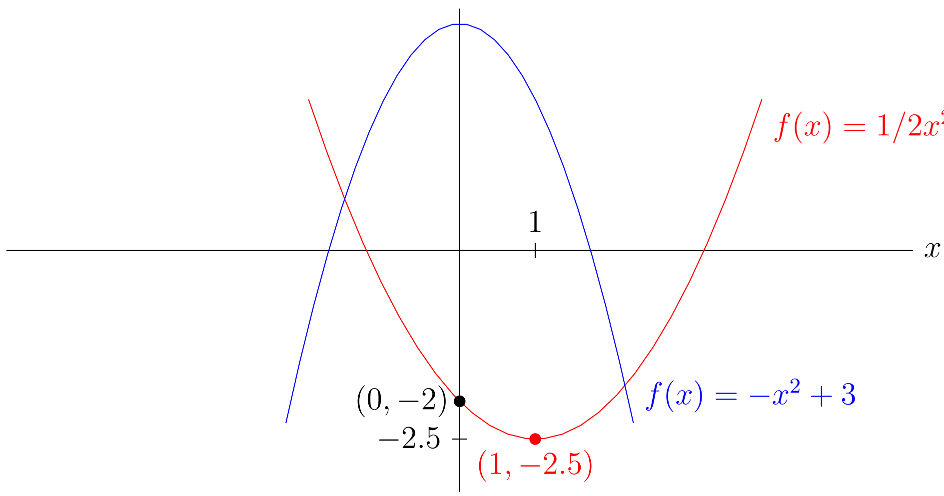
- *El precio de un producto dependiendo de la cantidad que se compre: Si un kilo de naranjas cuesta 2 euros, la función que nos relaciona peso con precio es $f(x) = 2x$.*

- *Si la entrada a una discoteca cuesta 7 euros y cada copa vale 5 euros el gasto total en una noche, siendo x el número de copas es $g(x) = 7 + 5x$ (funciones similares aparecen en el gasto de la luz a fin de mes o gasto del teléfono mobil en donde hay una cuota mensual a lo que hay que sumar el gasto del mes).*

Propiedades 3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que

- f es **acotada superiormente** si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq M$.
- f es **acotada inferiormente** si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq m$.
- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **máximo absoluto** para f si para todo $y \in \mathbb{R}$, $f(y) \leq f(x_0)$.
- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **mínimo absoluto** para f si para todo $y \in \mathbb{R}$, $f(y) \geq f(x_0)$.

★ Las **parábolas** $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, o los polinomios de grado dos.



Nos encontramos con que la parabola tiene un punto destacado, el **vértice de la parabola**. Este tiene por coordenada $\overline{OX}$, $x = -b/2a$ y por tanto, el vértice de f es $(-b/2a, f(-b/2a))$ (en nuestro ejemplo el punto $(1, -2.5)$). Por otro lado el termino independiente se corresponde con el corte de $f(x)$ en el eje $\overline{OY}$ (en nuestro ejemplo $(0, -2)$).

Si el coeficiente de mayor grado de $f(x)$ es positivo, la parábola es decreciente hasta su vértice, es decir, es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ y a partir de aquí crece (el intervalo en donde crece es $(-\frac{b}{2a}, \infty)$). Caso de que a sea negativo, la parabola crece hasta su vértice para luego decrecer hasta el infinito. Por tanto, si a es positivo, el vértice determina un mínimo absoluto para f, por lo que f es acotada inferiormente. Mientras que si a es negativo, el vértice determina un máximo absoluto para f y f es acotada superiormente.

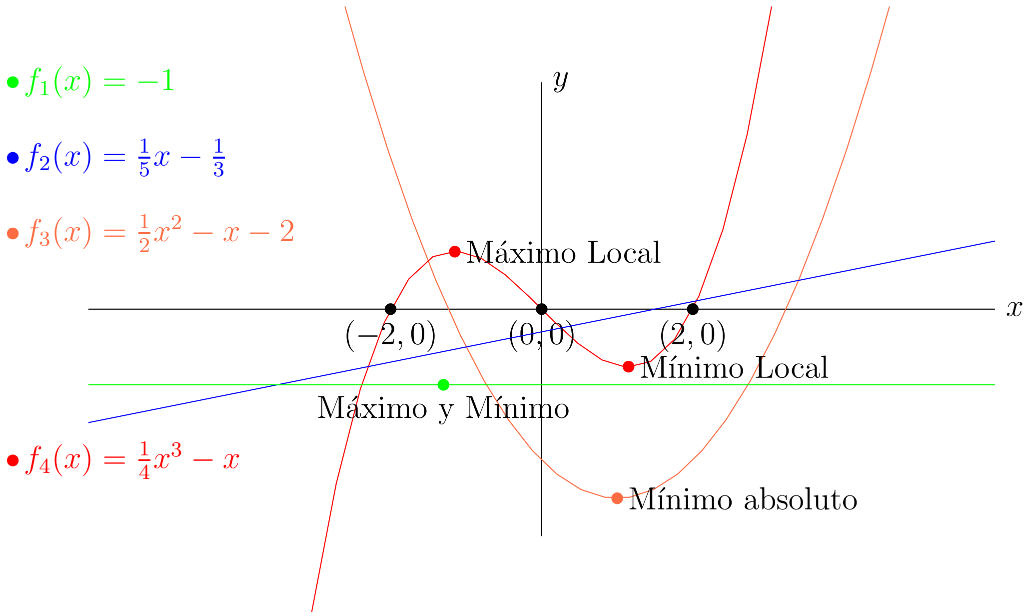
Nota: Observar que en la gráfica se ve claramente el crecimiento y decrecimiento de una función. Así como si esta está acotada superior o inferiormente (la parabola $f(x) = 1/2x^2 - x - 2$ está acotada inferiormente, ningún punto queda por debajo de $y = -2.5$)

Propiedades 4 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que

- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **máximo local** para f si existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}$ con $|x_0 - y| \leq \epsilon$ se tiene que $f(y) \leq f(x_0)$.

- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **mínimo local** para f si existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}$ con $|x_0 - y| \leq \epsilon$ se tiene que $f(y) \geq f(x_0)$.

★ Los polinomios en general: Como hemos dicho anteriormente, un polinomio de grado n tiene como mucho n raíces, o lo que es lo mismo, corta al eje $\overline{OX}$ a lo sumo en n ocasiones. Como sucede en el ejemplo, un polinomio de grado n tiene entre máximos y mínimos locales a lo sumo $n-1$.



⋆ La función $f_1(x) = -1$ es constante, por tanto es creciente y decreciente (no estricta). Es más, todo $x \in \mathbb{R}$ es tanto un máximo como un mínimo absoluto para f_1. Claramente está acotada tanto superior como inferiormente.
⋆ La función $f_2(x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}$ es estrictamente creciente, no tiene ni máximos ni mínimos en $\mathbb{R}$. No esta acotada ni superior ni inferiormente en $\mathbb{R}$.
⋆ La función $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$ posee un mínimo absoluto en $x = 1$ (por tanto en el punto $(1, -2.5)$. La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y creciente en el intervalo $(1, \infty)$. f_3 está acotada inferiormente y no está acotada superiormente.
⋆ La función $f_4(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$ tiene un mínimo local en $x = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.15$ (por tanto en el punto $(1.15, -0.76)$) y un máximo local en $x = -\sqrt{\frac{4}{3}} \approx -1.15$ (por tanto en el punto $(-1.15, 0.76)$). Es creciente en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{3}}) \cup (\sqrt{\frac{4}{3}}, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}})$. No está acotada ni superior ni inferiormente. Los puntos de corte con el eje $\overline{OX}$ son $(-2, 0), (0, 0), (2, 0)$. Corta al eje $\overline{OY}$ en el origen de coordenadas.

Teorema 5 (Interpolación Polinómica) *Generalmente no dispondremos de todos los datos en un determinado problema. El siguiente proceso nos va a permitir construir una función polinómica que se adapte a los datos conocidos y que nos podrá servir como modelo de estudio de dicho problema. Existen muchos métodos distintos para encontrar funciones que se adapten a unos datos concretos (se usaran uno u otro dependiendo del problema en cuestión). En este caso vamos a estudiar la interpolación polinómica:*

Supongamos que estamos estudiando un problema del que sabemos que para un valor x_i nuestra función (desconocida) vale y_i para $i = 1, 2, \ldots, n$. Tenemos entonces que el polinomio

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} y_i$$

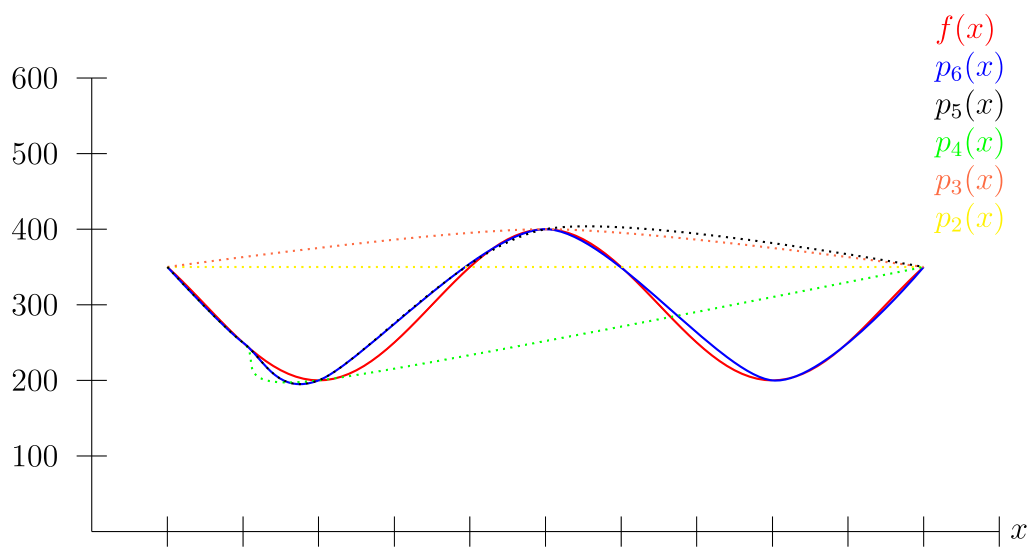
es el polinomio de menos grado que manda cada x_i al y_i correspondiente. Observar que este polinomio tiene grado $n-1$. Veamos un ejemplo: Supongamos que el consumo energético (medido en 100 Kilo-Watios) de una familia sigue la función $f(t) = \cos(\pi/3t) + 3$ al mes ($t = 1$ corresponde a enero). Supongamos que solo conocemos los datos de los meses:

$$f(1) = 4, f(2) = 3.5, f(3) = 2.5, f(7) = 4, f(10) = 2, f(11) = 2.5$$

Tenemos entonces que el polinomio al interpolar es,

$$p(x) = 1.65972 + 4.91581x - 3.29489x^2 + 0.795718x^3 - 0.0791171x^4 + 0.00276124x^5$$

La gráfica de f, la función que no conocíamos, y la de $p_k(x)$, nuestros polinomios interpolados, en donde k denota el numero de puntos que se han usado para construir el polinomio de interpolación, son las siguientes:



Como se puede ver, la función interpolada se parece, razonablemente, a la original. Cuantos mas datos de la original se tengan, más parecidas serán ambas funciones. Notar que $p_5(x)$ se parece al principio a $p_6(x)$ y al final a $p_3(x)$ (ya que se han tomado más puntos comunes con estas funciones en esos sitios).

Nota: Si los polinomios interpolados los evaluáramos lejos de los puntos que hemos elegido veríamos que la función original y dichos polinomios no tienen nada que ver (esto hay que tenerlo muy en cuenta cuando trabajamos con ellos).

Nota: El proceso de interpolar es realmente importante, ya que si tenemos una función realmente complicada de la que conocemos suficientes puntos, podemos sustituirla (la función) por el polinomio que aparece en la interpolación, que se comporta de forma bastante parecida (y es bastante más simple) que la función de partida.

3. Las funciones racionales

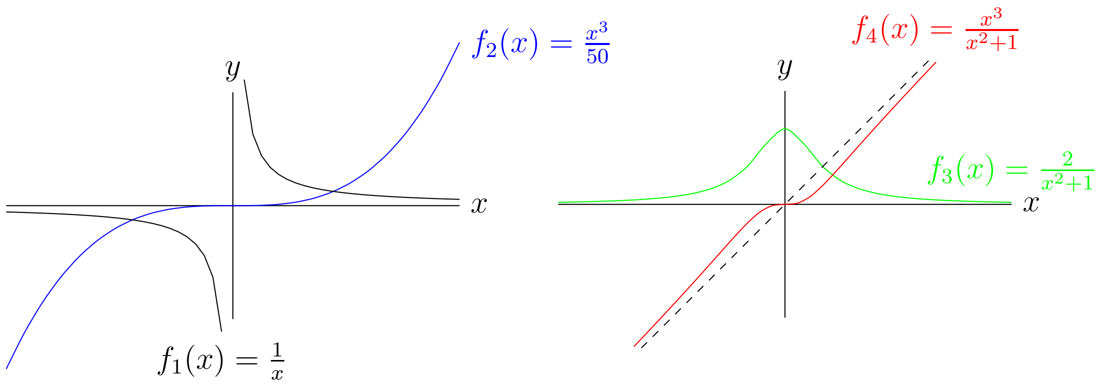
Definición 1 Las **funciones racionales** tienen la forma

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_s x^s}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

en donde $r, s \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_s, b_0, b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{R}$. El dominio de $f(x)$ es

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{s \in \mathbb{R} \mid q(s) = 0\}.$$

Aquí el tipo de gráficas de estas funciones es muy amplio. Algunos ejemplos son:



⋆ La función $f_1(x) = 1/x$ es decreciente en todo su dominio. No obstante no esta acotada ni superior ni inferiormente. No tiene máximos ni mínimos absolutos ni locales. Esta función tiene una propiedad que estudiaremos con más detalle en los próximos temas: cuanto mas pequeña es la x (próxima a $-\infty$) o cuanto más grande es x (próxima a ∞) la función más se "acerca" a cero. Y, cuanto mas cerca está x de cero mas proxima está la gráfica de f a la recta $y = 0$.

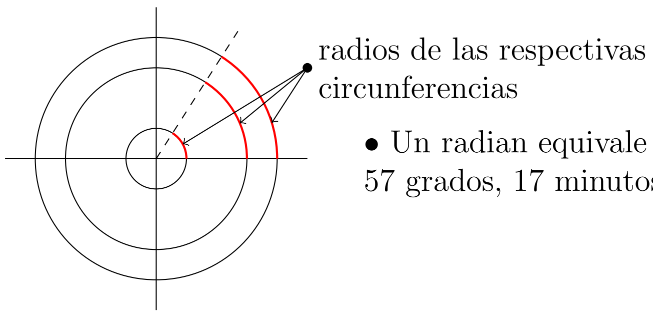
⋆ La función $f_2(x) = x^3/50$ es creciente estricta, sin máximos o mínimos absolutos o locales. Esta función tampoco está acotada superior o inferiormente.

⋆ La función $f_3(x) = 2/(x^2 + 1)$ es acotada (ningún valor es mayor que 2) teniendo un máximo absoluto en $x = 0$. Es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, \infty)$.

⋆ La función $f_4(x) = x^3/(x^2+1)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$. No está acotada ni posee máximos o mínimos. No obstante vuelve a tener una propiedad curiosa: cuanto mas pequeña es la x (próxima a $-\infty$) o cuanto más grande es x (próxima a ∞) la función más se "acerca" a la función $f(x) = x$.

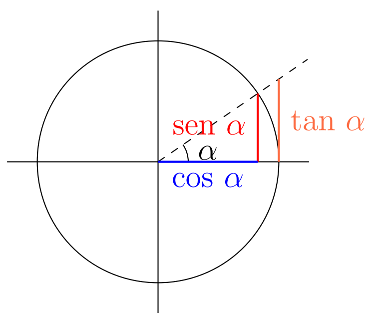
4. Funciones trigonométricas

Antes de empezar a estudiar las razones trigonométricas vamos a recordar brevemente las distintas unidades para medir ángulos. Los grados sexagesimales: Un grado sexagesimal corresponde exactamente con la noventavas parte del ángulo recto, es decir, un ángulo recto son 90º grados sexagesimales. Los grados decimales: Un ángulo recto son 100^m grados decimales (no suele usarse). Los radianes: dada cualquier circunferencia C se tiene que el ángulo cuyo arco mide el radio de C no depende de C (ver dibujo). En esta unidad, el ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}$ radianes ($\frac{\pi}{2}$ rad).



- Un radian equivale aproximadamente a 57 grados, 17 minutos y 44.8 segundos

Dado un ángulo α podemos calcular sus razones trigonométricas: $\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha$ y $\tan\alpha$. Vamos a definir funciones que asignan al valor de un ángulo medido en radianes (como veremos más adelante la representación gráfica de las razones trigonométricas depende, y mucho, de la unidad de medida del ángulo que se use), el valor de la razón trigonométrica correspondiente. En el siguiente gráfico se da el valor de las funciones seno, coseno y tangente de un ángulo α.

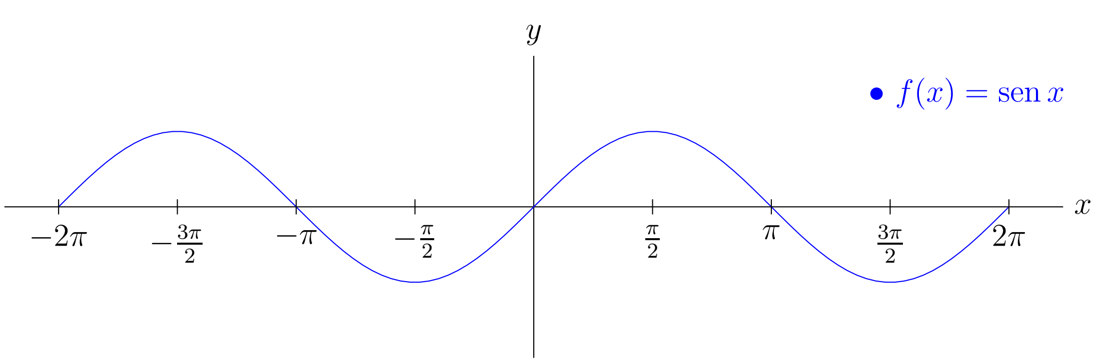


Propiedades 1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es

- **periódica** de periodo r si para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x) = f(x + r)$.
- **simétrica par** si para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x) = f(-x)$.
- **simétrica impar** si para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x) = -f(-x)$.

4.1. Función seno

Definición 2 Se llama función seno la que asigna a la variable independiente x el valor $f(x) = \operatorname{sen} x$. A continuación observamos la gráfica de la función $\operatorname{sen} x$.



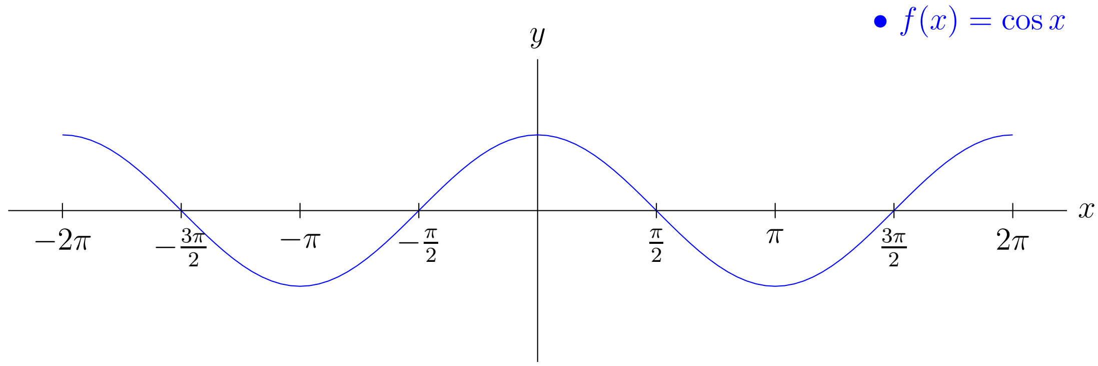
El dominio de la función $\operatorname{sen} x$ es toda la recta real. Siendo la función seno una función periódica de periodo 2π. La función es creciente en el intervalo $[0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi]$ siendo decreciente en $(\pi/2, 3\pi/3)$. la función tiene un máximo absoluto en $\pi/2$ y un mínimo absoluto en $-\pi/2$ (al ser periódica de periodo 2π estos resultados se repiten cada 2π). La imagen o recorrido de $\operatorname{sen} x$ es el intervalo cerrado $[-1, 1]$, por tanto $\operatorname{sen} x$ es una función acotada tanto superior como inferiormente. Por otro lado, la función $\operatorname{sen} x$ es simétrica impar.

Ejemplos A ⋆ *El movimiento armónico simple, como puede ser el movimiento de un péndulo sigue una función del tipo $f(x) = \alpha \operatorname{sen}(\beta x + \gamma)$ en donde α es la longitud de onda, el periodo de está función es $2\pi/\beta$ siendo γ la condición inicial.*

⋆ *El consumo energético de una familia a lo largo de un año sigue el patron de una función periódica. Con picos máximos en verano (por el aire acondicionado) y en invierno (por la calefacción) siendo los meses de otoño y primavera consumos mínimos.*

4.2. Función coseno

Definición 3 Se llama función coseno la que asigna a la variable independiente x el valor $f(x) = \cos x$. A continuación observamos la gráfica de la función $\cos x$.



El dominio de la función $\cos x$ es toda la recta real. Siendo la función coseno una función periódica de periodo 2π. La función es creciente en el intervalo $(\pi, 2\pi)$ siendo decreciente en $(0, \pi)$. la función tiene un máximo absoluto en 0 y un mínimo absoluto en π (al ser periódica de periodo 2π estos resultados se repiten cada 2π). La imagen o recorrido de $\cos x$ es el intervalo cerrado $[-1, 1]$, por tanto $\cos x$ es una función acotada tanto superior como inferiormente. Por otro lado, la función $\cos x$ es simétrica par.

Propiedades 4 Algunas propiedades de la función seno y coseno son las siguientes: Dados $x, y \in \mathbb{R}$,

(i) $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$.

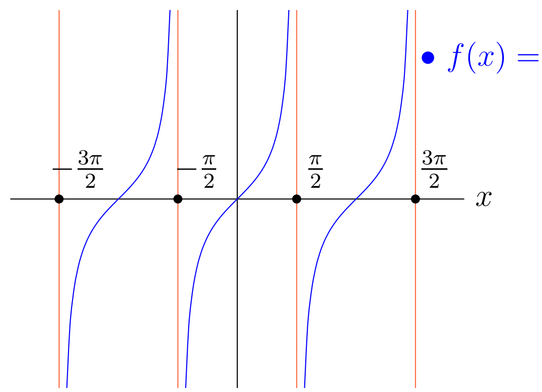
(ii) $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ y $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$.

(iii) $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$.

(iv) $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$.

4.3. Función tangente

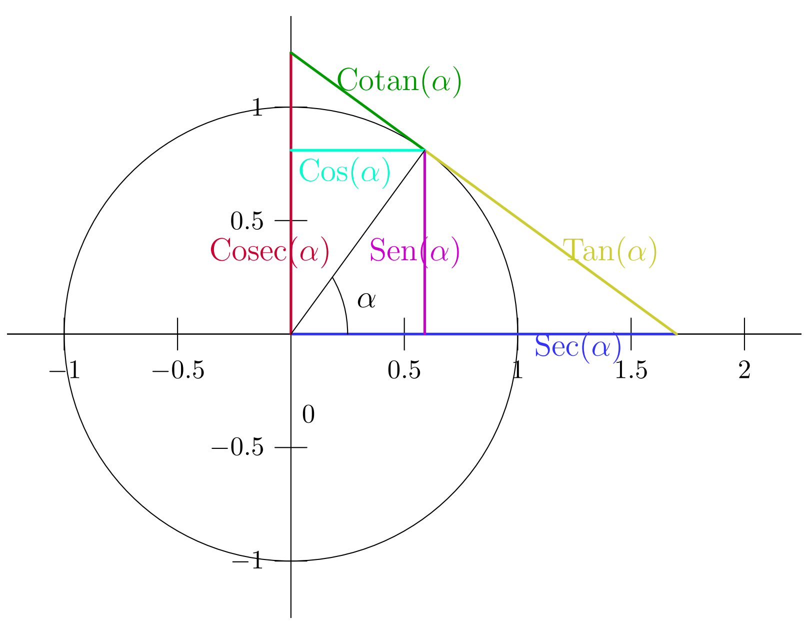
Definición 5 Se llama función tangente la que asigna a la variable independiente x el valor $f(x) = \tan x$. A continuación observamos la gráfica de la función $\tan x$.



El dominio de la función $\tan x$ es $\mathbb{R} - \{\frac{(2n+1)}{2}\pi \mid n \in \mathbb{N}\}$. Siendo la función tangente una función periódica de periodo π. La función es creciente en todo su dominio no teniendo ni máximos ni mínimos locales. La imagen o recorrido de $\tan x$ es todo $\mathbb{R}$, por tanto $\tan x$ no está acotada ni superior ni inferiormente. Por otro lado, la función $\tan x$ es simétrica impar.

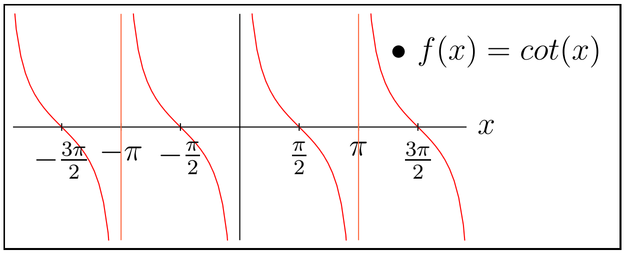
4.4. Las funciones secante, cosecante y cotangente

Definición 6 *Se define la función secante de un ángulo x como* $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. *Se define la función cosecante como* $Cosec(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$. *Por último la cotangente de x se define como* $Cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$. *Las funciones trigonométricas tienen una interpretación geométrica. Así, en la siguiente gráfica se pueden ver definidas cada una de estas funciones:*

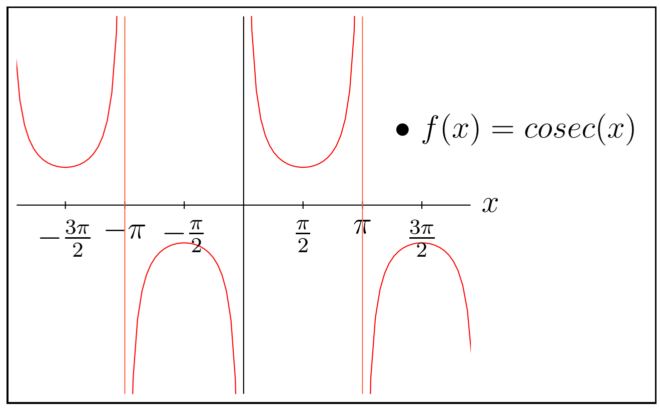


En el campus virtual podéis encontrar un enlace llamado Funciones trigonométricas, en el que podéis experimentar como varían estas 6 funciones trigonométricas en función del ángulo α. En cualquier caso, aquí están las gráficas de estas funciones:

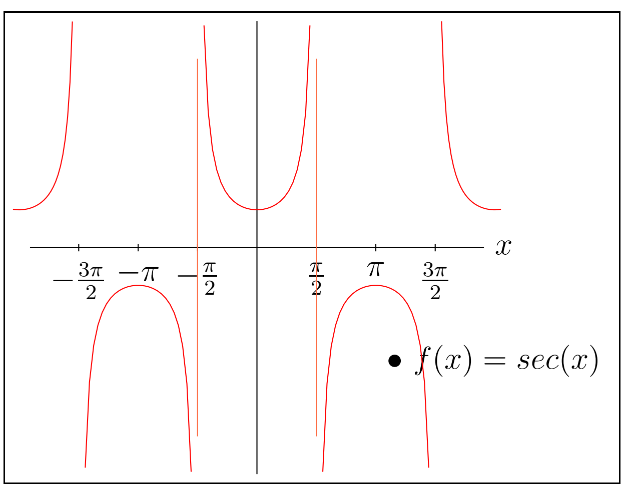
La Función cotangente está definida para todos los números reales que no son múltiplos de π, es decir, el dominio de la cotangente es $\mathbb{R} - \{n \cdot \pi \; |n \in \mathbb{Z}\}$. Es decreciente en todo su dominio no teniendo ni máximos ni mínimos locales. La imagen o recorrido de $\tan x$ es todo $\mathbb{R}$, por tanto $\tan x$ no está acotada ni superior ni inferiormente. Por otro lado, la función $\tan x$ es simétrica impar y periódica de periodo π.



La Función cosecante está definida para todos los números reales que no son múltiplos de π, es decir, el dominio de la cosecante es $\mathbb{R} - \{n \cdot \pi \; |n \in \mathbb{Z}\}$. Es una función periódica de periodo 2π, por lo que la estudiaremos simplemente en el intervalo abierto $(0, 2\pi)$. Es una función decreciente en los intervalos $(0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ siendo creciente en los intervalos $(\pi/2, \pi) \cup (\pi, 3\pi/2)$. Por tanto tiene un mínimo local en $x = \pi/2$ y un máximo local en $3\pi/2$. La imagen o recorrido de *cosecx* es $(-\infty, -1) \cap (1, \infty)$, por tanto *cosecx* no está acotada ni superior ni inferiormente. Por otro lado, la función *cosecx* es simétrica impar.



La Función secante está definida para todos los números reales que no son múltiplos de $\pi/2$, es decir, el dominio de la función secante es $\mathbb{R} - \{n \cdot \pi/2 \; |n \in \mathbb{Z}\}$. Es una función periódica de periodo 2π, por lo que la estudiaremos simplemente en el intervalo abierto $(-\pi, \pi)$. Es una función decreciente en el intervalo $(-\pi, 0)$ siendo creciente en el intervalo $(0, \pi)$. Por tanto tiene un mínimo local en $x = 0$ y un máximo local en π. La imagen o recorrido de *secx* es $(-\infty, -1) \cap (1, \infty)$, por tanto *sec x* no está acotada ni superior ni inferiormente. Por otro lado, la función *sec x* es simétrica impar.



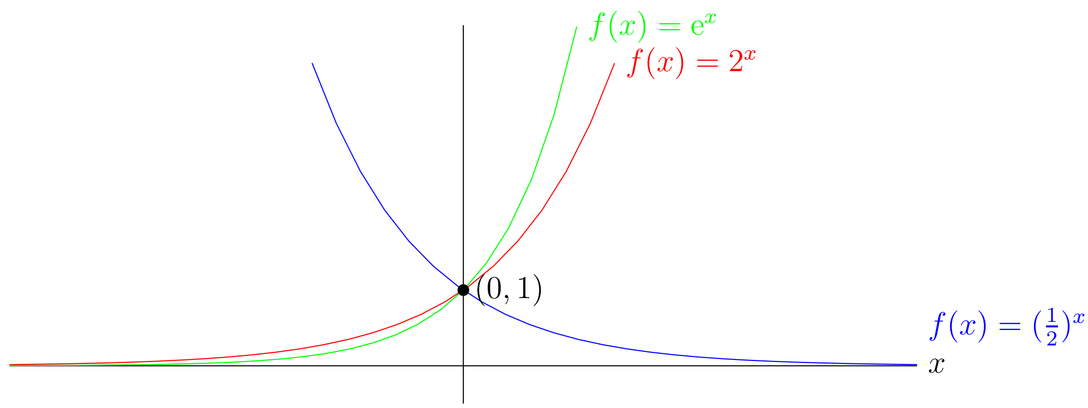
5. Funciones Exponenciales

Definición 1 Se llama función exponencial de base a a la función que asigna a la variable independiente x el valor $f(a) = a^x$, donde a es un número real positivo diferente de 1.

Así, por ejemplo, las funciones $f(x) = 5^x$ y $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ son funciones exponenciales de base 2 y $\frac{1}{3}$, respectivamente.

Especialmente importante es la función exponencial de base e, $f(x) = e^x$, ya que describe múltiples situaciones reales: evolución de poblaciones, fenómenos de desintegración radiactiva, etc.

La gráfica de las funciones exponenciales varía según la base a sea mayor o menor que 1. Observemos las gráficas de las siguientes funciones.



El dominio de las funciones exponenciales es $\mathbb{R}$. Siendo la función exponencial una función creciente en todo su dominio si tiene base mayor que 1 y decreciente en todo su dominio si tiene base menor que 1, no teniendo ni máximos ni mínimos locales. La imagen o recorrido son los reales positivos, $(0, \infty)$, siendo una función acotada inferiormente (0 es una cota inferior). Es claro que las exponenciales no son funciones periódicas. Cabe destacar que si la base de la función es mayor que 1, cuando x es suficientemente pequeño a^x se aproxima a la recta $y = 0$ mientras que cuando la base de la función es menor que 1, cuando x es suficientemente grande a^x se aproxima a la recta $y = 0$.

Propiedades 2 (Propiedades de las funciones Exponenciales) Sean a, b dos números reales positivos y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = a^x$. Entonces

(i). Toda función exponencial verifica que $f(0) = 1$.
(ii). $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Es decir,$f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$.
(iii). $a^x/a^y = a^{x-y}$. Es decir, $f(x)/f(y) = f(x - y)$.
(iv) Toda función exponencial es inyectiva.
(v). $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.
(vi). $a^{-x} = (1/a)^x$
(vii). $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$.
(viii). $a^x/b^x = (a/b)^x$.

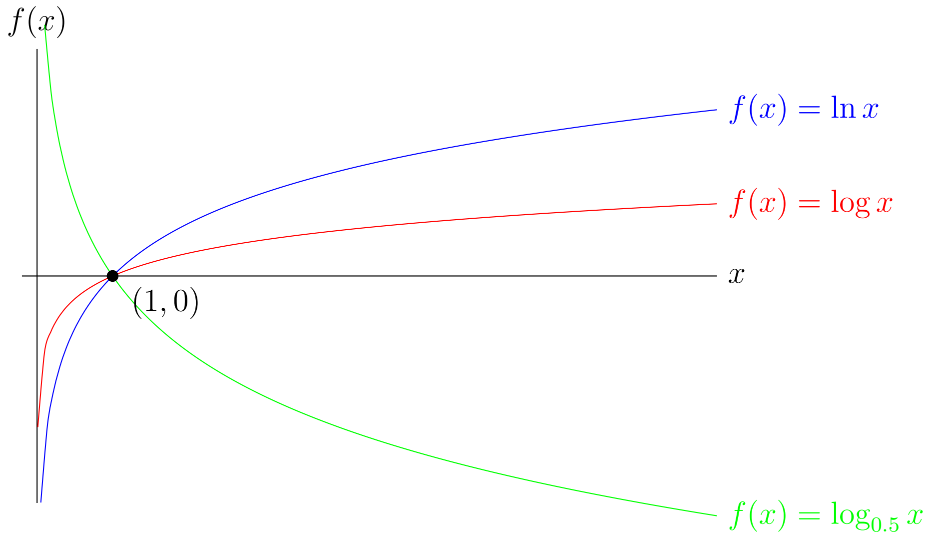
Ejemplos A

- Una población que crece sin estar sometida a ninguna restricción, en general, puede modelizarse por una función exponencial del tipo $P(t) = Po \cdot e^{\alpha t}$ En donde P_0 es la población inicial (para $t = 0$) y α es una constante que depende de la tasa de natalidad de la población. Normalmente las especies en libertad están en equilibrio unas con otras, no obstante, cuando se introduce una especie en un nuevo habitad (que no es hostil para ella) la población crece de forma exponencial hasta un punto critico para después estabilizarse (o desaparecer).

- La desintegración de un compuesto radiactivo se modeliza a partir de una función exponencial. La velocidad de desintegración es directamente proporcional a la cantidad de compuesto por lo que la función que da la cantidad de sustancia radioactiva en función del tiempo es $M(t) = Po \cdot e^{\alpha t}$ en donde P_0 es la masa inicial y α es la "constante de desintegración radioactiva".

6. Funciones logarítmicas

Definición 1 Se llama función logarítmica en base a a la función que asigna a la variable independiente x el valor $f(x) = \log_a x$, donde a es un número real positivo diferente de 1. Recordemos que $\log_a x = y$ si y solo si $a^y = x$. Al igual que en las funciones exponenciales, la gráfica de las funciones logaríticas varía según la base a sea mayor o menor que 1.



El dominio de las funciones logarítmicas es $(0, \infty)$. Siendo la función logarítmica una función creciente en todo su dominio si tiene base mayor que 1 y decreciente en todo su dominio si tiene base menor que 1, no teniendo ni máximos ni mínimos locales. La imagen o recorrido en $\mathbb{R}$, no siendo una función acotada superior o inferiormente. Es claro que las funciones logarítmicas no son funciones periódicas. Cabe destacar que cuando x está lo suficientemente proximo a cero $Log_a(x)$ se aproxima a la recta $x = 0$.

Propiedades 2 (Propiedades de las funciones Logarítmicas) Sea a un número real positivo $(a \neq 1)$ y sea $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definido por $\log_a(x)$, el logaritmo en base a de x. Entonces

(i). $\log_a(1) = 0$ y $\log_a(a) = 1$.

(ii). $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

(iii). $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$.

(iv) $\log_a(x) = \log_b(x)/\log_b(a)$.

(v). $a^{\log_a(x)} = x$.

(vi). $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

(vii). $\log_a$ es una función inyectiva.

Nota: El apartado (iv) era un resultado muy útil cuando no había calculadoras y solo se tenían las tablas de Logaritmos neperianos.

Ejemplos A (Wikipedia)

- La clasificación estelar (La clasificación de estrellas por su brillo). Este sistema de clasificación proviene originalmente del astrónomo griego Hiparco, quién en el año 134 AC había clasificado las estrellas en seis magnitudes de acuerdo con su brillo. Hiparco asignó la magnitud 1 a las 20 estrellas más brillantes del firmamento y fue asignando valores mayores a estrellas cada vez más débiles hasta asignar la magnitud 6 a estrellas apenas visibles a simple vista. Este esquema fue adoptado posteriormente por el astrónomo egipcio Ptolomeo y transmitido en la tradición astronómica occidental. La escala de este sistema es logarítmica.

- La escala Richter (magnitud de un terremoto) aplicable a los terremotos originados en la falla de San Andrés, fue desarrollada por Charles Richter con la colaboración de Beno Gutenberg en 1935, ambos investigadores del Instituto de Tecnología de California, con el propósito original de separar el gran número de terremotos pequeños de los menos frecuentes terremotos mayores observados en California en su tiempo. La escala fue desarrollada para estudiar únicamente aquellos terremotos ocurridos dentro de un área particular del sur de California cuyos sismogramas hayan sido recogidos exclusivamente por el sismómetro de torsión de Wood-Anderson. Richter reportó inicialmente valores con una precisión de un cuarto de unidad, sin embargo, usó números decimales más tarde.

  $$M = \log A + 3\log(8\Delta t) - 2.92$$

  donde:

  A = amplitud de las ondas en milímetros, tomada directamente en el sismograma. Δt = tiempo en segundos desde el inicio de las ondas P al de las ondas S. M = magnitud arbitraria pero constante a terremotos que liberan la misma cantidad de energía.

  El uso del logaritmo en la escala es para reflejar la energía que se desprende en un terremoto. El logaritmo incorporado a la escala hace que los valores asignados a cada nivel aumenten de forma exponencial, y no de forma lineal.

- El Índice de Margalef, o índice de bio-diversidad de Margalef, es una medida utilizada en ecología para estimar la bio-diversidad de una comunidad con base a la distribución numérica de los individuos de las diferentes especies en función del número de individuos existentes en la muestra analizada.

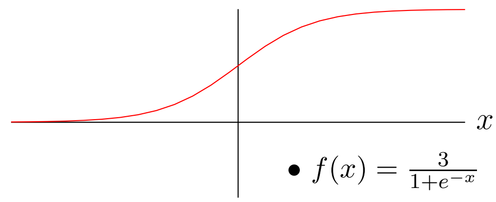
  El índice de Margalef fue propuesto por el biólogo y ecólogo Ramón Margalef y tiene la siguiente expresión $I = (s-1)/LnN$, donde I es la bio-diversidad, s es el número de especies presentes, y N es el número total de individuos encontrados (pertenecientes a todas las especies). La notación Ln denota el logaritmo neperiano de un número.

  Valores inferiores a 2,0 son considerados como relacionados con zonas de baja biodiversidad (en general resultado de efectos antropogénicos) y valores superiores a 5,0 son considerados como indicativos de alta biodiversidad.

- El carbono 14 (C_{14}) es un isótopo radioactivo del carbono ampliamente usado para fechar fósiles. El dióxido de carbono en el aire contiene C_{14} así como C_{12}, que es un isótopo no radioactivo. Los científicos han encontrado que la razón C_{14}/C_{12} en el aire ha permanecido prácticamente constante. Las plantas vivas absorben dióxido de carbono de la atmósfera, y así la razón C_{14}/C_{12} en una planta viva es la misma que hay en el aire. Cuando la planta muere, la absorción del dióxido de C_{12} en la planta permanece, mientras que el C_{14} decrece y la razón C_{14}/C_{12} decrece exponencialmente. La razón C_{14}/C_{12} en un fósil t años después de que estuvo vivo es aproximadamente $R(t) = R_0 e^{-kt}$ donde $k = Log(2)/5730$ y R_0 es la razón C_{14}/C_{12} en la atmósfera. Los científicos pueden estimar la edad del fósil comparando $R(t)$ con R_0.

7. Función Sigmoide

Muchos procesos naturales complejos muestran un comportamiento temporal que comienza en unos niveles bajos al inicio, hasta acercarse a un clímax transcurrido un cierto tiempo. En cierto momento del proceso se produce en una región caracterizada por una fuerte aceleración intermedia. Ejemplo típico de este tipo de funciones es $f(x) = \frac{1}{1+e^{-1}}$ aunque hay otras que se comportan mas o menos igual como pueden ser las funciones arcotangente (que se estudiara mas adelante) o funciones tipo $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. La gráfica de este tipo de funciones tienen una típica forma en S como puede ser visto en el ejemplo.



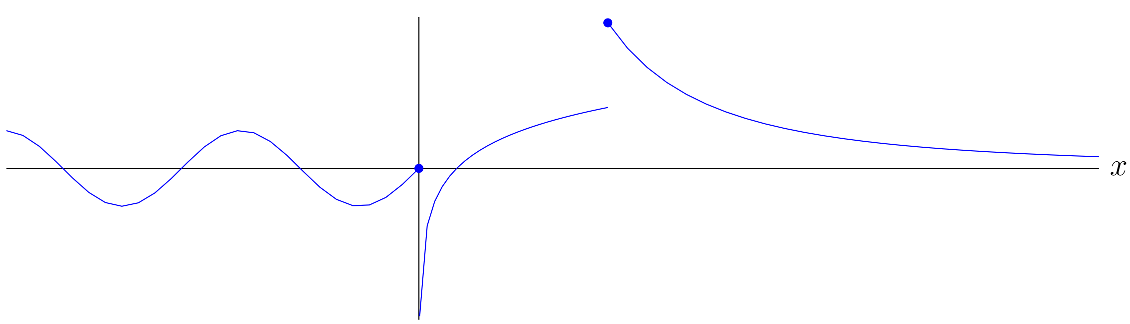
Estas curvas son modelos bastante precisos del crecimiento de una población cuando los factores ambientales imponen un límite superior al tamaño posible de la población, o en el caso que los índices de natalidad disminuyen cuando la población aumenta, por ejemplo. También describen la propagación de epidemias y aparecen en muchas reacciones químicas y físico-químicas.

8. Funciones a ramas

A veces nos encontramos que la regla que define una función no es la misma para todos los puntos del dominio, sino que dependiendo de donde nos encontramos (dentro del dominio) tenemos una definición para f. Así,

$$f(x) = \begin{cases} sen(x), & \text{Si } -\infty < x \leq 0 \\ Log(x), & \text{Si } 0 < x < 5 \\ \frac{100}{x^2+1}, & \text{Si } 5 \leq x < \infty \end{cases}$$

Significa que si $x \in (-\infty, 0]$ la función vale $sen(x)$, para $x \in (0, 5)$ la función vale $Log(x)$ y para $x \in [5, \infty)$ la función vale $\frac{1}{x^2+1}$. La representación gráfica de esta función es la siguiente:

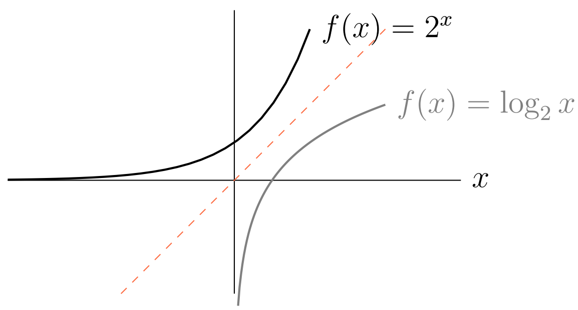


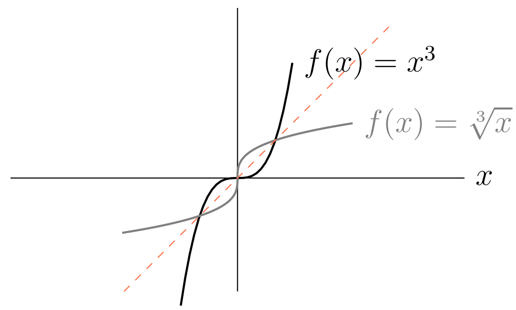
9. Funciones inversas

Ya hemos estudiado en Teoría que dada una función biyectiva $f : X \to Y$ podemos encontrar una función (también biyectiva) $f^{-1} : Y \to X$ tal que

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$$

En general lo que hace la función f^{-1} es precisamente deshacer lo que hizo la función f. Es decir al elemento y, imagen por f de x lo manda a x y eso no es mas que girar la gráfica 180º según la recta $y = x$. Por ejemplo, la función logarítmica en base a es la función inversa de la función exponencial de basa a. Si las representamos en una misma gráfica obtenemos:

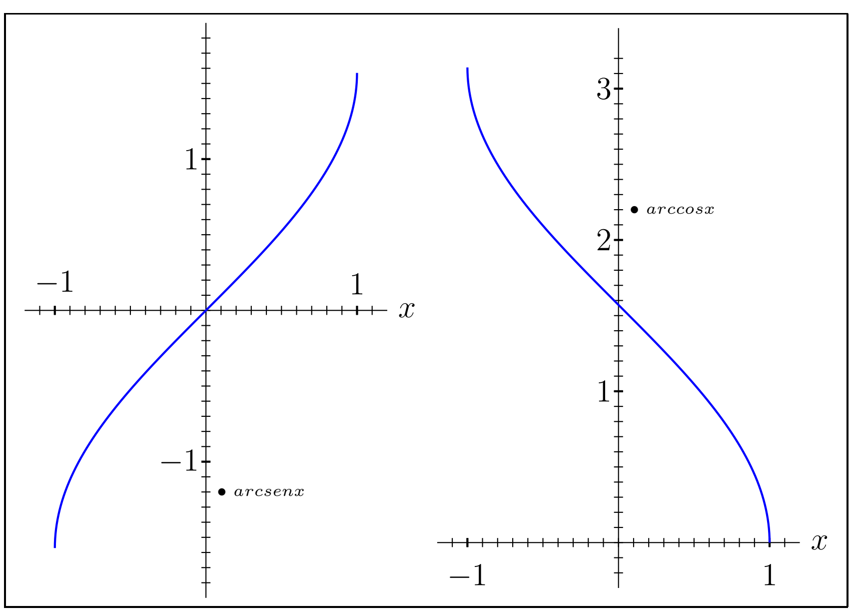




Luego la gráfica de $Log_2(x)$ (la inversa de $f(x) = 2^x$) no es más que la gráfica simetría a f sobre la recta $y = x$ (pintada en naranja a trazos en el dibujo). Veamos algunos ejemplos más (y estudiemos algunas funciones más):

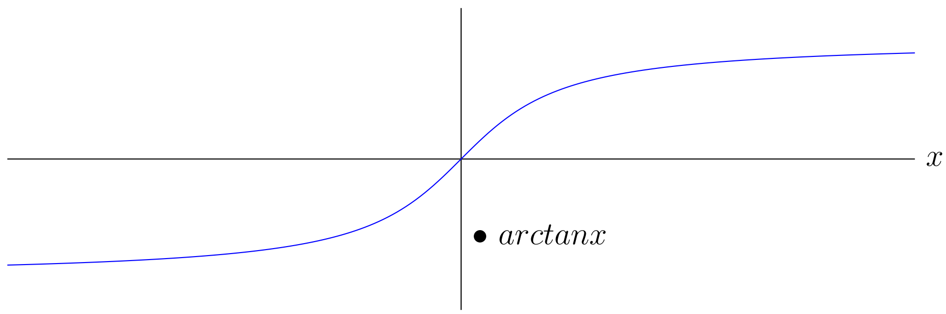
9.1. La función arcoseno, arcocoseno y arcotangente

Vamos a estudiar la inversa de la función seno. Como ya sabemos la función seno no es una función biyectiva, por lo que no posee inversa. No obstante la imagen de la función seno es el intervalo cerrado $[-1, 1]$ y para cada $y \in [-1, 1]$ si que no podemos preguntar por un ángulo α tal que $\operatorname{sen}(\alpha) = y$ (por ejemplo, para $y = 0$ nos encontramos que cualquier $\alpha = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ es una solución). Es más, hay un único α que cae entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Por tanto definimos la función arcoseno es una función con dominio $[-1, 1]$ e imagen $[-\pi/2, \pi/2]$ tal que para cada $y \in [-1, 1]$, $arcosen(y) = \alpha$ siendo α el único ángulo $[-\pi/2, \pi/2]$ con $sen(\alpha) = y$ (ver gráfica).



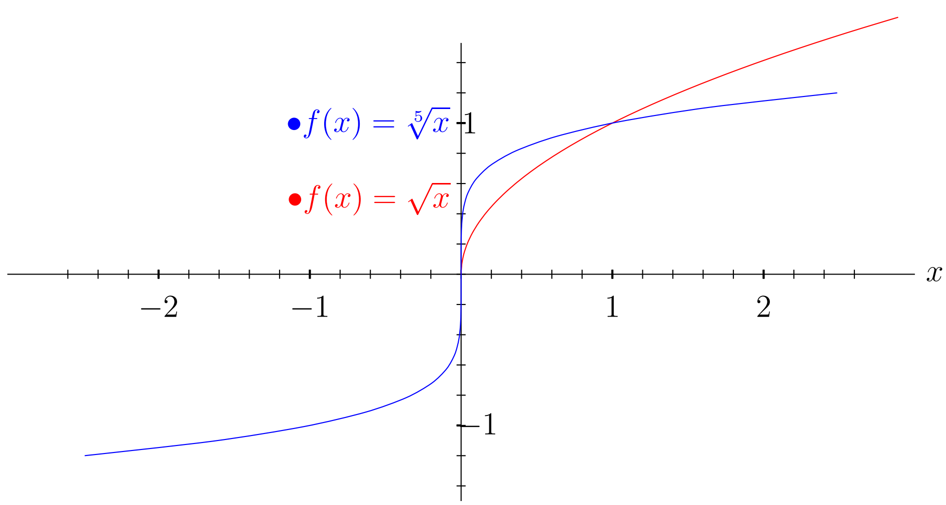
En el caso de la función coseno nos encontramos con las mismas particularidades. Aunque no es biyectiva, si que para cada $y \in [-1, 1]$ existe un único ángulo α en el intervalo $[0, \pi]$ tal que $cos(\alpha) = y$. Por tanto de igual forma podemos definir la función $arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ definida por $arccos(y) = \alpha$ siendo α el único ángulo en el intervalo $[0, \pi]$ tal que $cos(\alpha) = y$.

En el caso de la función tangente nos encontramos con que su imagen es todo $\mathbb{R}$, por lo que la función arcotangente es una función con dominio $\mathbb{R}$ y codominio $(-\pi/2, \pi/2)$. Siendo su gráfica (Observar que nos encontramos con una gráfica de una función sigmoidal):



9.2. Las raíces n-ésimas

Dado un número natural n y un elemento $x \in \mathbb{R}$ se define las raíz n-ésima de x y se representa por $\sqrt[n]{x}$ como cualquier real $y \in \mathbb{R}$ tal que $y^n = x$. Es decir, la aplicación $\sqrt[n]{}(x)$ es la función inversa de la aplicación $f(x) = x^n$. El dominio de la función raíz n-ésima depende de si n es un natural par o impar. Así, si n es par, el dominio de $\sqrt[n]{}(x)$ son los reales positivos, mientras que si n es impar tiene por dominio todo $\mathbb{R}$. Las gráficas de las funciones raíces n-ésimas son:



En la siguiente tabla aparecen las funciones que hemos estudiado junto con sus inversas:

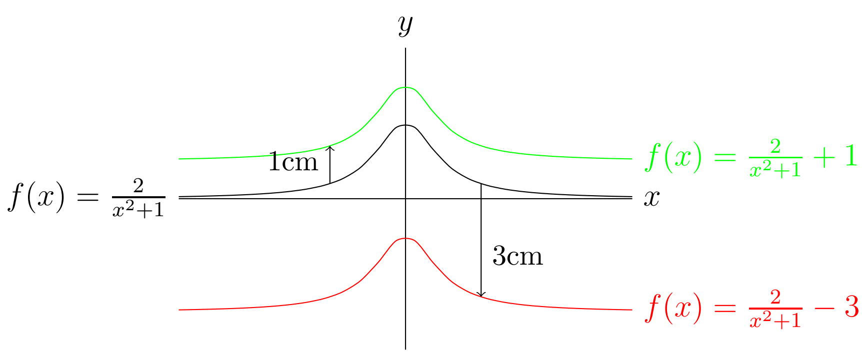
Función	Dominio	Imagen	Inversa	Condiciones
$\mathrm{sen}(x)$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[-1, 1]$	$\mathrm{arcsen}(x)$	
$\cos(x)$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	$\arccos(x)$	
$\tan(x)$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$	
a^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\log_a(x)$	$0 < a < 1$
a^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\log_a(x)$	$1 < a$
x^n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\sqrt[n]{x}$	$n \in \mathbb{N}$, n par
x^n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\sqrt[n]{x}$	$n \in \mathbb{N}$, n impar

10. Transformaciones básicas de funciones

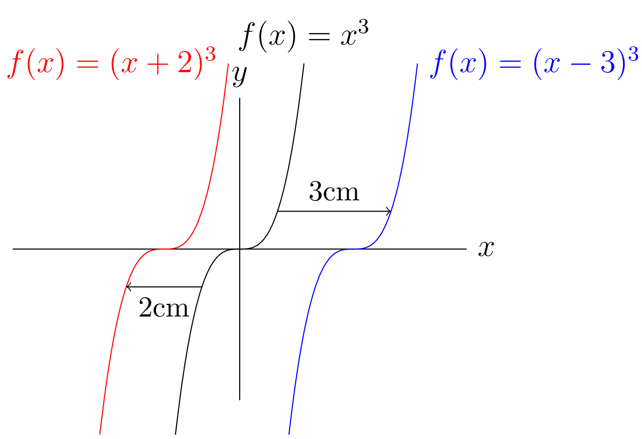
En esta sección vamos a ver como varía la representación gráfica de una función $y = f(X)$ cuando se le realiza ciertas transformaciones en ella. En transformaciones de funciones puedes experimentar, para las funciones $f(x) = x^2, \sin x, 2^x$ y $\sqrt{2x+3}$, cada una de las transformaciones que vamos a ver en esta sección. El el campus virtual (en la página web de nuestra asignatura también puedes encontrar algunos ejemplos).

10.1. Traslaciones verticales, horizontales y oblicuas

Sea $y = f(x)$ una función y sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces la gráfica de la función $y' = f(x) + k$ consiste en desplazar la gráfica de la función k unidades hacia arriba, si k es positivo, o desplazar la gráfica de la función k unidades hacia abajo, si k es negativo:

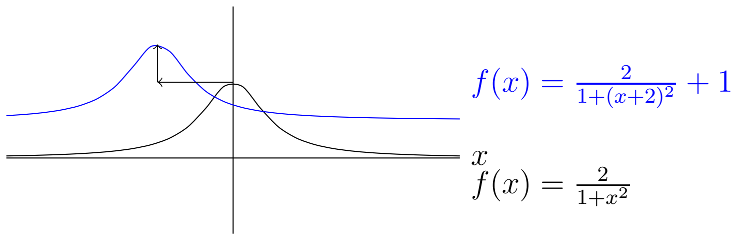


Sea $y = f(x)$ una función y sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces la gráfica de la función $y' = f(x + k)$ consiste en desplazar la gráfica de la función k unidades hacia la izquierda, si k es positivo, o desplazar la gráfica de la función k unidades hacia la derecha, si k es negativo:



★ Hemos estudiado dos funciones reales que, aunque con nombre propio, resulta que una es traslación horizontal de la otra: $\boxed{\cos(x) = \text{sen}(x + \pi/2).}$

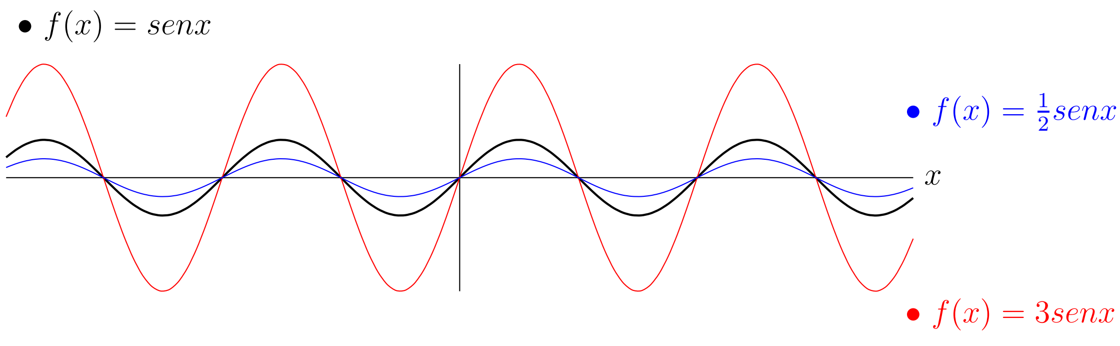
Podemos utilizar conjuntamente estos dos procesos para desplazar una gráfica de forma oblicua a donde queramos. Así, si consideramos la función $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ y queremos una nueva función que este desplazada hacia arriba 3 unidades y hacia la izquierda dos unidades tendríamos que construir la función $f'(x) = \frac{1}{1+(x+2)^2} + 3$. Veamos su gráfica:



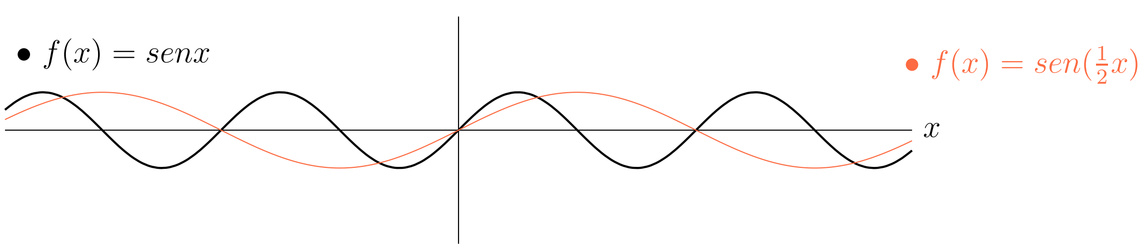
En internet puedes encontrar cientos de páginas web con gráficas interactivas en las que puedes experimentar con estos conceptos. Por ejemplo en traslaciones de funciones. Es posible que tengas que instalar el Plug-in Descartes Web 2.0.

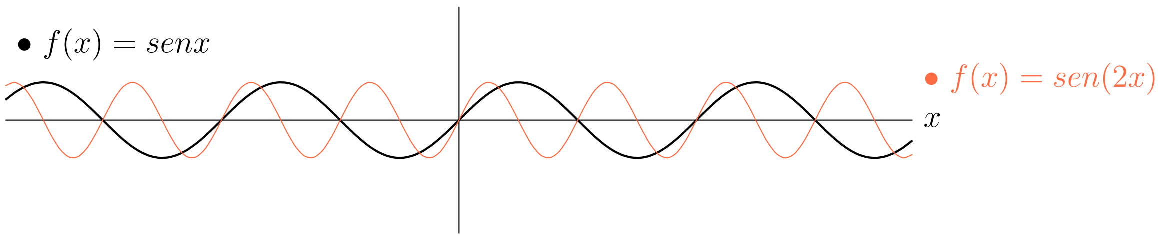
10.2. Dilataciones y contracciones

Sea $y = f(x)$ una función y sea $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$. Entonces la gráfica de la función $y' = kf(x)$ consiste en "dilatar" o "contraer" la gráfica de la función $f(x)$ (según sea $k < 1$ o $k > 1$, es claro que $k = 1$ deja la gráfica intacta) en la dirección $\overline{OY}$.



Sea $y = f(x)$ una función y sea $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$. Entonces la gráfica de la función $y' = kf(x)$ consiste en "dilatar" o "contraer" la gráfica de la función $f(x)$ (según sea $k > 1$ o $k < 1$, es claro que $k = 1$ deja la gráfica intacta) en la dirección $\overline{OX}$.

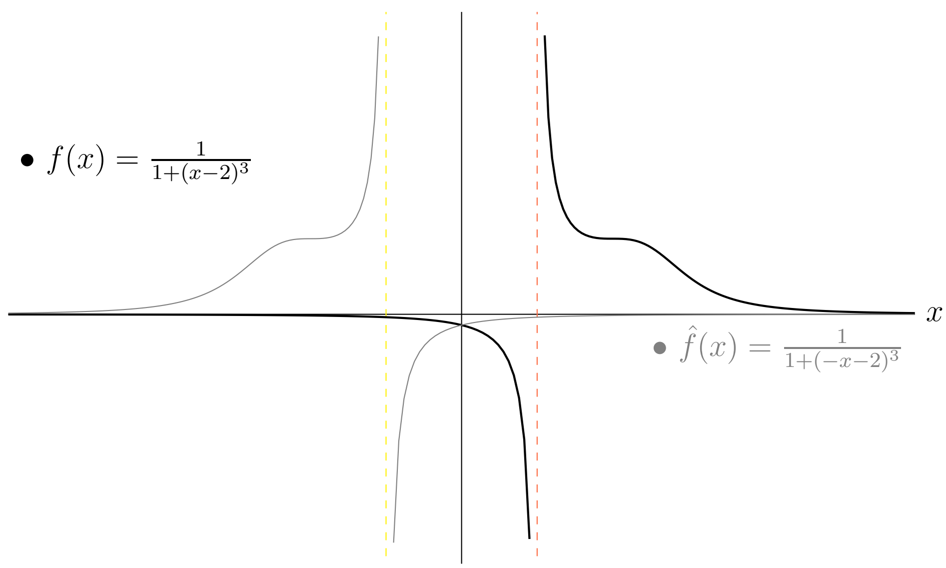




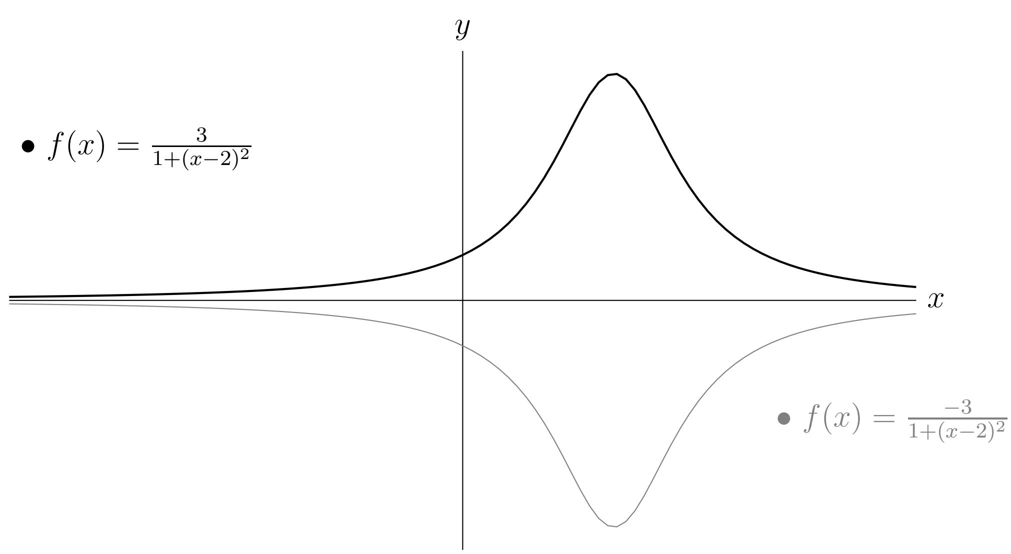
Nota: Observar que la función de cualquier movimiento armónico simple se consigue con ciertas traslaciones horizontales y verticales, junto con ciertas dilataciones de la función seno (o de la función coseno).

10.3. Simetrías

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Entonces la gráfica de la función $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\hat{f}(x) := f(-x)$ es simétrica a la gráfica de f respecto del eje $\overline{OY}$.



Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Entonces la gráfica de la función $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\widetilde{f}(x) = -f(x)$ es simétrica a la gráfica de f respecto del eje $\overline{OX}$.



★ Tenemos por tanto que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es simétrica par si $f = \hat{f}$ (coincide con su simetría respecto del eje $\overline{OY}$). Es decir, $f(x) = f(-x)$. Mientras que es simétrica impar si $f(x) = -f(-x)$ (coincide con su simetría respecto del eje $\overline{OY}$ y luego del eje $\overline{OX}$).

11. Construcción de nuevas funciones

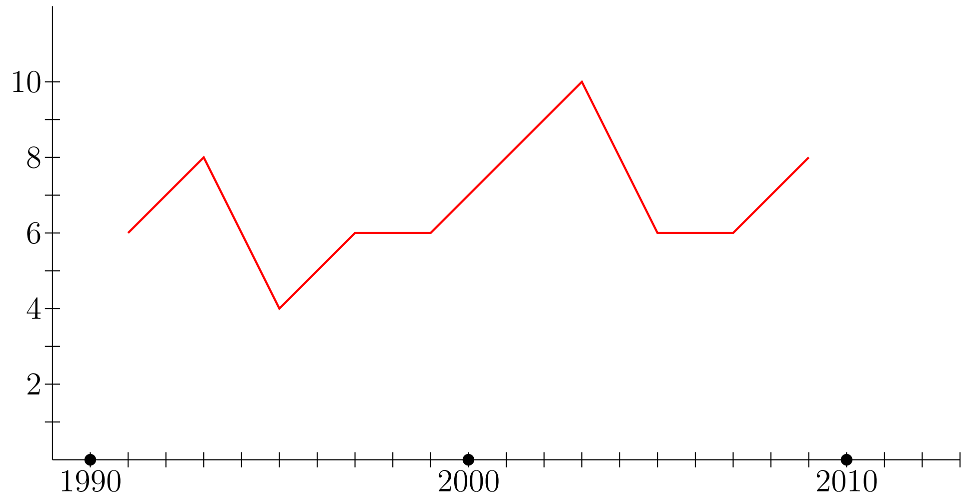
Dadas dos funciones $f : D \to \mathbb{R}$ y $g : D' \to \mathbb{R}$ podemos construir nuevas funciones a partir de ellas. Por una parte las podemos sumar, restar multiplicar, dividir o componer:

- $f + g$ tendrá por dominio $D \cap D'$.
- $f - g$ tendrá por dominio $D \cap D'$.
- $f \cdot g$ tendrá por dominio $D \cap D'$.
- f/g tendrá por dominio $D \cap D' - \{x \in D' \mid g(x) = 0\}$.
- $g \circ f$ tendrá por dominio $\{x \in D \mid f(x) \in D'\}$. En este último caso podemos poner algunos ejemplos:
    - ◆ Si $g(x) = \sqrt{x}$, $g \circ f(x) = \sqrt{f(x)}$ que tendrá por dominio los $x \in D$ tales que $f(x) \geq 0$.
    - ◆ Si $g(x) = \log x$, $g \circ f(x) = \log(f(x))$ que tendrá por dominio los $x \in D$ tales que $f(x) > 0$.
    - ◆ Si $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $g \circ f(x) = \sqrt[3]{(f(x))}$ que tendrá por dominio D.

Un segundo proceso, ya estudiado anteriormente son las llamadas funciones a ramas.

12. Ejercicios

1 La siguiente función representa el número de nidos de águila real en los picos de europa desde el 1991 al 2008.



1. Di los años en los que el número de parejas tuvieron máximos absolutos y relativos.
2. Di los años en donde la población de águilas estaba creciendo.
3. Determina los años en los que la población era óptima (de 5 a 8 parejas).
4. ¿Que año hubo un mínimo absoluto?

2 Representa gráficamente las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ x-1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2-2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Indica los dominios de f y de g.

3 Calcula el dominio de las siguientes funciones reales

$$f_1(x) = \sqrt[2]{x^2-4x} \qquad f_2(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x}) \qquad f_3(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x)}$$

$$g_1(x) = \log(x^2-4x+4) \qquad g_2(x) = \frac{1}{\log(x)} \qquad g_3(x) = \frac{\log(x^2+1)}{x^2-1}$$

$$h_1(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} \qquad h_2(x) = \frac{2}{\operatorname{sen}(x)} \qquad h_3(x) = \log(2x+3)$$

$$p_1(x) = \frac{\log(x+1)}{1+\log(x)} \qquad p_2(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad p_3(x) = \frac{1}{x^2-5x+4}$$

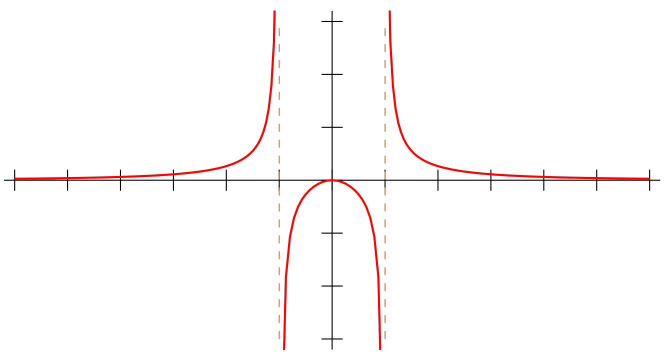
$$q_1(x) = \sqrt{x-5}$$

4 Escribe la función polinómica de primer grado que pasa por los puntos $(1, -1)$, $(0, 4)$.

5 Sabemos que el número de toneladas de papel reciclado en una ciudad imaginaria es: enero 200tm, abril 300tm, junio 300tm. Construye el polinomio de interpolación para estos datos y calcula el papel reciclado (estimado) en los meses febrero, marzo y mayo. ¿Tendría algún sentido calcular con esta formula el papel reciclado en septiembre? (Razona tu respuesta)

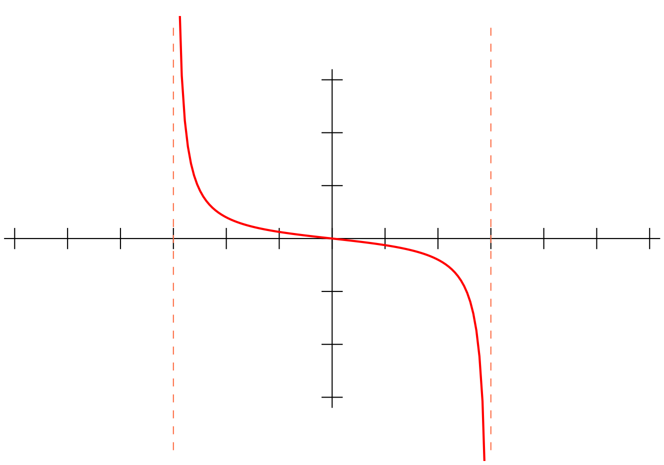
6 Calcula el polinomio de menor grado que vale lo mismo que la función $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x)$ en los valores $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Acuérdate de cuando estemos en clase practica en el aula de informática de representar ambas funciones.

7 Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^2}{x^4-1}$. La gráfica de la función f es



- ¿Cuál es el dominio de f?.
- ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento-decrecimiento de f?.
- ¿Cuáles son los Máximos y mínimos locales y absolutos de f?.
- ¿Es f una función periódica? ¿Simétrica par?, ¿Simétrica impar? etc..

8 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por la gráfica:*



- *¿Cuál es el dominio de f y de f^{-1}?.*
- *¿Cuáles son los intervalos de crecimiento-decrecimiento de f y de f^{-1}?.*
- *¿Cuáles son los Máximos y mínimos locales y absolutos de f y de f^{-1}?.*
- *¿Es f^{-1} una función periódica? ¿Simétrica par?, ¿Simétrica impar? ¿y f?*
- *¿Es f acotada? ¿y f^{-1}?*

9 Calcula los siguientes logaritmos:
(i). $\log_2 32$ (ii). $\log_{32} 2$ (iii). $\log_2(\log_2 2)$

10 Calcula la base de los siguientes logaritmos:
(i). $\log_b 3 = \frac{1}{2}$ (ii). $\log_b 3 = -2$ (iii). $\log_b (\frac{1}{81}) = \frac{1}{8}$

Capítulo 3

Limites de Funciones. Funciones continuas

- En este tema vamos a estudiar los limites en funciones reales.
- Estudiaremos el concepto de función continua y algunas de sus propiedades.

1. Límites en funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

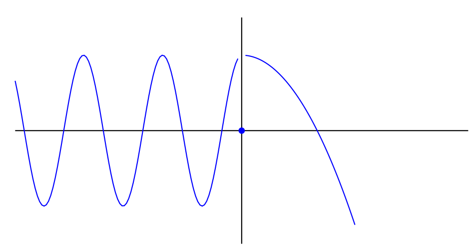
Definición 1 Dada una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y dado $x_0 \in [a, b]$ se dice que el **límite** cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ es l si:

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - x_0| \leq \delta, \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| \leq \delta$, entonces $|f(x) - l| \leq \epsilon$, y se representa por $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

Esto a grosso modo quiere decir que si x se aproxima a x_0 (sin ser x_0), $f(x)$ se aproxima a l. Veamos un ejemplo:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \cos(6x), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1 - x^2, & x > 0 \end{cases}$



Tenemos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ aunque la función en 0 valga 0 y esté definida en dos ramas distintas. En cualquier caso, cuando x se acerca a 0 (sin ser cero), la función $f(x)$ se acerca a 1.

Dada una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y dado $x_0 \in [a, b]$, no tiene porque existir $\lim_{x\to x_0} f(x)$, es más, caso de que exista, calcular un límite "a pelo", es decir, usando simplemente la definición es muy complicado. La siguiente proposición nos ayudará a resolver este problema. Aunque antes un ejemplo:

Teorema 2 Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ dos funciones con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = l'$, con $x_0 \in [a, b]$. Entonces:

(i) $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = l + l'$.

(ii) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = l\cdot l'$.

(iii) Si $l' \neq 0$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$.

(iv) Si $f(x)$ es positiva, $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = l^{l'}$. Es más:

(iv) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x\to l} g(x) = l'$ entonces

$$\lim_{x\to x_0} g\circ f(x) = l'$$

Ejemplos A

⋆ *Si $f(x)$ es una* ***función constante****, $f(x) = a$ con $a \in \mathbb{R}$, entonces dado $x_0 \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

⋆ *Si $f(x)$ es la* ***función identidad****, $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces dado $x_0 \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0$$

Por tanto, con los ejemplos anteriores y la proposición 2 (Pag. 45):

⋆ *Si $f(x)$ es una* ***función polinómica****, $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_sx^s$, y $x_0 \in \mathbb{R}$,*

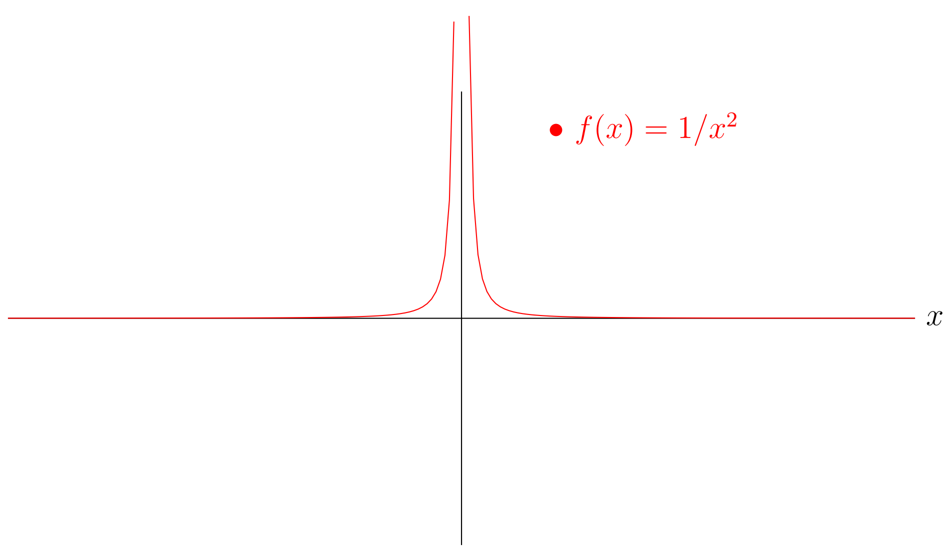
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_sx_0^s \quad (= f(x_0))$$

⋆ *Si $f(x)$ es una* ***función racional****, $f(x) = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_sx^s}{b_0+b_1x+\cdots+b_rx^r} = \frac{p(x)}{q(x)}$ y $q(x_0) \neq 0$,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_sx_0^s}{b_0 + b_1x_0 + \cdots + b_rx_0^r} \quad (= f(x_0))$$

Hasta este momento hemos definido el límite de una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ en un punto $x_0 \in [a,b]$, nos podemos plantear ahora algunas generalizaciones de límite:

Si consideramos la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e intentamos calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$ nos damos cuenta que cuanto más nos acercamos a cero, la función mas grande se hace. Ver gráfica:



Con esta idea vamos a dar las nociones de límite infinito y límite menos infinito.

Definición 3 Dada una función $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y dado $x_0\in[a,b]$:

• Se dice que el límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ es infinito, y se representa por $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, si:

$$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists\delta>0 \text{ tal que si } 0<|x-x_0|\leq\delta,\Rightarrow f(x)\geq M,$$

es decir, para todo $M\in\mathbb{R}$ existe un $\delta>0$ tal que si $0<|x-x_0|\leq\delta$, entonces $f(x)\geq M$.

• Se dice que el límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ es menos infinito, y se representa por $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, si:

$$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists\delta>0 \text{ tal que si } 0<|x-x_0|\leq\delta,\Rightarrow f(x)\leq M,$$

es decir, para todo $M\in\mathbb{R}$ existe un $\delta>0$ tal que si $0<|x-x_0|\leq\delta$, entonces $f(x)\leq M$.

En la gráfica anterior nos encontramos que cuanto mas grande es el valor de x, mas proxima a cero es la función. Esto nos da idea para definir limites hacia el infinito:

Definición 4 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función. Se define:

• Se dice que el límite cuando x tiende a infinito de $f(x)$ es l, y se representa por $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$, si:

$$\forall\epsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{R} \text{ tal que si } x\geq N,\Rightarrow |f(x)-l|\leq\epsilon,$$

es decir, para todo $\epsilon>0$ existe $N\in\mathbb{R}$ tal que para todo $x\geq N$, $|f(x)-l|\leq\epsilon$.

• Se dice que el límite cuando x tiende a menos infinito de $f(x)$ es l, y se representa por $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$, si:

$$\forall\epsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{R} \text{ tal que si } x\leq N,\Rightarrow |f(x)-l|\leq\epsilon,$$

es decir, para todo $\epsilon>0$ existe $N\in\mathbb{R}$ tal que para todo $x\leq N$, $|f(x)-l|\leq\epsilon$.

Por último tenemos los limites en infinito y menos infinito que son infinito o menos infinito:

Definición 5 • Se dice que el límite cuando x tiende a infinito de $f(x)$ es infinito, y se representa por $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, si:

$$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{R} \text{ tal que si } x\geq N,\Rightarrow f(x)\geq M,$$

es decir, para todo $M\in\mathbb{R}$ existe $N\in\mathbb{R}$ tal que si $x\geq N$, $f(x)\geq M$.

• Se dice que el límite cuando x tiende a infinito de $f(x)$ es menos infinito, y se representa por $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, si:

$$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{R} \text{ tal que si } x\geq N,\Rightarrow f(x)\leq M,$$

es decir, para todo $M\in\mathbb{R}$ existe $N\in\mathbb{R}$ tal que si $x\geq N$, $f(x)\leq M$.

• Se dice que el límite cuando x tiende a menos infinito de $f(x)$ es infinito, y se representa por $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, si:

$$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{R} \text{ tal que si } x\leq N,\Rightarrow f(x)\geq M,$$

es decir, para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{R}$ tal que si $x \leq N$, $f(x) \geq M$.

• Se dice que el límite cuando x tiende a menos infinito de $f(x)$ es menos infinito, y se representa por $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, si:

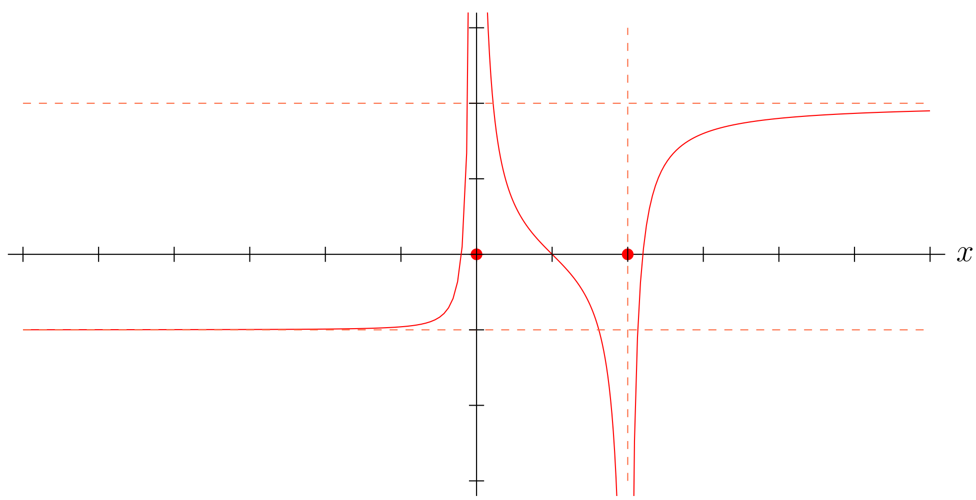
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{R} \text{ tal que si } x \leq N, \Rightarrow f(x) \leq M,$$

es decir, para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{R}$ tal que si $x \leq N$, $f(x) \leq M$.

Como ejemplo de estos límites tenemos: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{25x^2} - 1 & \text{Si } x < 0; \\ 0 & \text{Si } x = 0; \\ \frac{x-1}{x^2-2x} & \text{Si } 0 < x < 2; \\ 0, & \text{Si } x = 2 \\ \frac{x}{5x-10} + \frac{11}{5} & \text{si } x > 2; \end{cases}$$

La representación gráfica de esta función es la siguiente:



Por tanto tenemos que:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ $\qquad$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$

Por último vamos a introducir un nuevo tipo de límite, los limites laterales:

Definición 6 Dada una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y dado $x_0 \in (a, b)$ se dice que el **límite** cuando x tiende a x_0 **por la derecha** de $f(x)$ es l si:

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - x_0| \leq \delta, \text{con } x > x_0 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| \leq \delta$, con $x > x_0$, entonces $|f(x) - l| \leq \epsilon$, y se representa por $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$.

Definición 7 Dada una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ y dado $x_0 \in (a,b)$ se dice que el **límite** cuando x tiende a x_0 **por la izquierda** de $f(x)$ es l si:

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x - x_0| \leq \delta, \text{con } x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| \leq \delta$, con $x < x_0$, entonces $|f(x) - l| \leq \epsilon$, y se representa por $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

Un ejemplo en donde existen estos limites laterales y no existe el limite (en un punto x_0) es $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x_0 = 0$. En este caso tenemos (ver la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, ver gráfica 3 (Pag. 27)) que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{pero} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = (\text{No existe})$$

Es más, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 8 *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función y sea $x_0 \in (a,b)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *Existe el límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ y es l.*
- *Existe los límite laterales cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ y son ambos igual a l.*

Definición 9 Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una aplicación.

- Se dice que f tiene una asíntota vertical en x_0 si el límite lateral por la izquierda o por la derecha de f en x_0 vale $\pm\infty$. Como un ejemplo particular las funciones $f(x) = 1/x$ o $f(x) = 1/x^2$ tienen asíntotas verticales en $x = 0$. La función dada en el ejemplo 1 (Pag. 48) tiene dos asíntotas verticales, una en $x = 0$ y la otra en $x = 2$.
- Se dice que f tiene una asíntota horizontal en $y = y_0$ si el límite cuando x tiende a ∞ o $-\infty$ de $f(x)$ es y_0. La función dada en el ejemplo 1 (Pag. 48) tiene dos asíntotas horizontales, una en $y = -1$ y la otra en $y = 2$.
- Se dice que f tiene una asíntota oblicua según la recta $y = ax + b$ (en donde $a, b \in \mathbb{R}$) si $\lim_{x \to \infty} f(x) - (ax + b) = 0$. Es decir, la función se acerca a la recta $y = ax + b$. Normalmente no se conoce los valores de a ni de b, pero se pueden calcular de la siguiente forma:
$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} f(x) - ax$$

Nota: En general, si tenemos una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, f tiene una asíntota oblicua si el grado de $p(x)$ es el grado de $q(x)$ más uno.

Ejemplos B Determina todas las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3+2x^2+1}{x^2-1}$. Tenemos que el dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Por otro lado

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{(x-1)(x+1)} = -\infty, , \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{(x-1)(x+1)} = \infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{(x-1)(x+1)} = -\infty, , \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{(x-1)(x+1)} = \infty$$

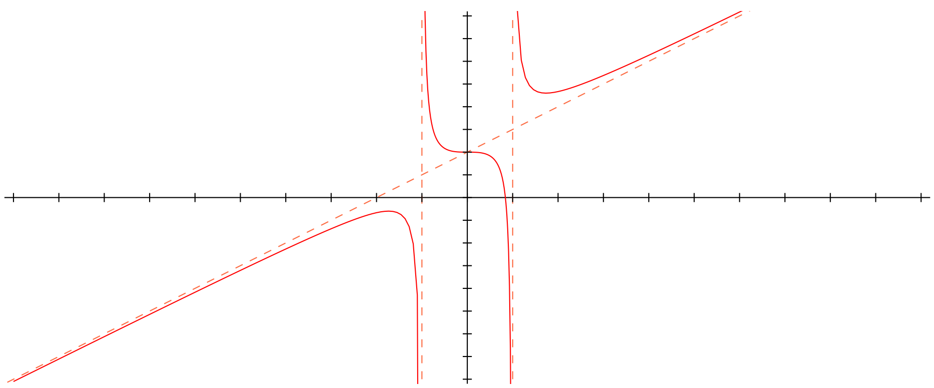
Luego tiene asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$. Por otra parte, como el grado del numerador es tres y el del denominador dos, sabemos que tiene asíntotas oblicuas:

$$a = \lim_{x\to\infty} f(x)/x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2+1}{x^3-x} = 1, \lim_{x\to-\infty} f(x)/x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2+1}{x^3-x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2+1}{x^2-1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+2}{x^2-1} = 2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2+1}{x^2-1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+2}{x^2-1} = 2$$

Por tanto $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = x + 2$ (tanto cuando x tiende a infinito como a menos infinito). Veamos su gráfica:



Nos encontramos otra vez con que el cálculo de estos últimos límites “a pelo” no es fácil. El siguiente Teorema es una generalización del Teorema 2 (Pag. 45).

Teorema 10 Sean f, g dos funciones. Supongamos que existen los límites:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = l',$$

en donde l, l' y a pueden ser o números reales o $\pm\infty$. Entonces:

(i)	$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = l + l'$.	(Salvo $\infty - \infty$)
(ii)	$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = l \cdot l'$.	(Salvo $\pm\infty \cdot 0$)
(iii)	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$.	(Salvo $l' = 0$, $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$)
(iv)	Si $f(x)$ es positiva, $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = l^{l'}$.	(Salvo el caso 1^∞)
(v)	Si $\lim_{x\to l} g(x) = l'$ entonces $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = l'$	

Nota: Por tanto, salvo algunos casos indeterminados ($\infty - \infty$, $\pm\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞, $\frac{l}{0}$), podemos calcular bastantes limites de funciones.

Observación: Podemos calcular de forma fácil el límite de cualquier función polinómica y con algún esfuerzo el límite de cualquier función racional.

1.1. Límites de funciones polinómicas

Sea $f(x)$ una **función polinómica**, $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$,
Si $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\star \lim_{x\to x_0} f(x) = a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n \ (= f(x_0))$$

Para límites más (o menos) infinito nos aparece la indeterminación $(\infty - \infty)$. No obstante, si multiplicamos y dividimos por x elevado al grado del polinomio dicha indeterminación desaparece, así,.

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = \lim_{x\to\pm\infty} x^n\left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + a_n\right)$$

Por tanto, si denotamos por $Sig(a)$ el signo de a, tenemos que:

$$\star \lim_{x\to\infty} f(x) = Sig(a_n)\cdot\infty.$$

$$\star \lim_{x\to-\infty} f(x) = Sig(a_n)\cdot\infty \text{ (Si } n \text{ es par)}$$

$$\star \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\,Sig(a_n)\cdot\infty \text{ (Si } n \text{ es impar).}$$

1.2. Límites de funciones racionales

Vamos a estudiar ahora los limites en funciones racionales. Para ello vamos a empezar recordando algunos resultados visto en cursos anteriores.

Proposición 11 *Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}[X]$ un polinomio y sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces el resto de dividir $p(x)$ por $x - a$ coincide con la evaluación de $p(x)$ en a.*

Si sabemos que un polinomio $p(x)$ es divisible por $x - a$, es decir, si $p(a) = 0$, nos encontramos con que $p(x) = (x-a)q(x)$ para encontrar el polinomio $q(x)$ podemos dividir de forma usual $p(x)$ por $x - a$ o podemos aplicar la **regla de Ruffini**: Dividamos por Ruffini el polinomio $p(x) = x^5 + x^3 - 10x^2 + 5x - 10$ por $x - 2$. En primer lugar, como

$$p(2) = 2^5 + 2^3 - 10\cdot 2^2 + 5\cdot 2 - 10 = 32 + 8 - 40 + 10 - 10 = 0$$

Sabemos que la división es exacta. Comenzamos haciendo el dibujo:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 1 & -10 & 5 & -10 \\ 2 & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Comenzamos bajando el 1 debajo de la linea horizontal. Multiplicamos $2\cdot 1 = 2$ y colocando el resultado, 2 bajo el cero sobre la linea horizontal. Por último en este primer paso sumamos al cero el 2 (ver el siguiente dibujo) y lo escribimos bajo la linea horizontal. Ahora solo hay que ir repitiendo este proceso hasta terminar la división. Multiplicamos $2\cdot 2 = 4$ y colocando el resultado, 4 bajo el uno sobre la linea horizontal. Ahora sumamos al uno el 4 y lo escribimos bajo la linea horizontal 5.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 1 & -10 & 5 & -10 \\ 2 & & 2 & 4 & & & \\ \hline & 1 & 2 & 5 & & & \end{array}$$

Si seguimos repitiendo este proceso hasta terminar el algoritmo, tenemos los siguientes pasos:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 1 & -10 & 5 & -10 \\ 2 & & 2 & 4 & 10 & & \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 1 & -10 & 5 & -10 \\ 2 & & 2 & 4 & 10 & 0 & \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 & \end{array}$$

Con lo que obtenemos

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 1 & -10 & 5 & -10 \\ 2 & & 2 & 4 & 10 & 0 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 0 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

Que nos lleva a la factorización $p(x) = (x-2)\cdot(x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 5)$.

Ejemplos C Sea $f(x)$ una **función racional**, $f(x) = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_sx^s}{b_0+b_1x+\cdots+b_rx^r} = \frac{p(x)}{q(x)}$,

★ Consideremos $x_0 \in \mathbb{R}$ y estudiemos en primer lugar $\lim_{x\to x_0} f(x)$:

⋆ Si $q(x_0) \neq 0$,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_sx_0^s}{b_0 + b_1x_0 + \cdots + b_rx_0^r} \ (= f(x_0))$$

⋆ Si $q(x_0) = 0$, nos encontramos con la indeterminación ($\frac{a}{0}$ con $a \in \mathbb{R}$). Veamos que podemos hacer desaparecer esta indeterminación si sacamos todos los factores $(x - x_0)$ de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$: si dividimos por $x - x_0$ (por ejemplo aplicando Ruffini) las veces necesarias, llegaríamos a:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-x_0)^s p'(x) \quad \text{con } p'(x_0) \neq 0 \\ q(x) &= (x-x_0)^r q'(x) \quad \text{con } q'(x_0) \neq 0 \end{aligned}$$

y entonces:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)^s p'(x)}{(x-x_0)^r q'(x)}$$

Quedando, una vez que se simplifica la expresión anterior (podemos simplificarla ya que al hacer el limite siempre estamos pensando en x que aunque están próximos a x_0 nunca son x_0, por lo que nunca dividimos por cero:

⋆ Si $r = s$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{p'(x)}{q'(x)}$.

⋆ Si $r < s$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)^{s-r}p'(x)}{q'(x)} = 0$.

⋆ Si $r > s$ y $r - s$ impar, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{p'(x)}{(x-x_0)^{r-s}q'(x)} = \nexists$ (no existe).

⋆ Si $r > s$ y $r - s$ par, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{p'(x)}{(x-x_0)^{r-s}q'(x)} = \alpha\cdot\infty$,

En donde $\alpha = Sig(\lim_{x\to x_0} \frac{p'(x)}{q'(x)})$.

Un ejemplo típico de este último caso es la función $f(x) = 1/x$ (cuando nos acercamos a 0 por la izquierda la función tiende a $-\infty$ mientras que cuando nos acercamos por la derecha la función tiende a ∞.

★ Estudiemos ahora los limites infinitos, cuando x tiende a $\pm\infty$ (aparecen indeterminaciones tipo $\frac{\infty}{\infty}$): En este caso la indeterminación desaparece si dividimos ambos polinomios por x^k siendo k el mínimo entre r y s. En este caso tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_s x^s}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r} =?$$

⋆ Si $s = r$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_s}{b_s}$.
⋆ Si $s > r$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = Sig(\frac{a_s}{b_r}) \cdot \infty$.
⋆ Si $s < r$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_s x^s}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r} =?$$

⋆ Si $s = r$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{a_s}{b_s}$.
⋆ Si $s < r$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
⋆ Si $s > r$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha \cdot Sig(\frac{a_s}{b_r}) \cdot \infty$
En donde $\alpha = +$, si $r + s$ es par, y $\alpha = -$ si $r + s$ es impar.

1.3. Límites de funciones trigonométrica

Sea $f(x)$ una **función trigonométrica**,
⋆ Si $x_0 \in Dom(f)$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
En los siguientes casos los límites **no existen** (ver las gráfica):
⋆ Si $x_0 = k\pi + \frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x\to x_0} Tan(x)$.
⋆ Si $x_0 = k\pi + \frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x\to x_0} Sec(x)$.
⋆ Si $x_0 = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x\to x_0} CoSec(x)$.
⋆ Si $x_0 = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x\to x_0} CoTan(x)$.
⋆ Si $x_0 = \pm\infty$, de todas las funciones trigonométricas sólo existen los límites: (ver gráfica),

$$\lim_{x\to\infty} ArcTan(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty} ArcTan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} ArcCoTan(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} ArcCoTan(x) = \pi$$

1.4. Límites de funciones logarítmicas y exponenciales

Sea $f(x)$ una **logarítmica o exponencial**,

⋆ Si $x_0 \in Dom(f)$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

⋆ Si $a > 1$, $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ $\lim_{x\to\infty} Log_a(x) = \infty$.
$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.
$\lim_{x\to 0} Log_a(x) = -\infty$.

⋆ Si $0 < a < 1$, $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ $\lim_{x\to\infty} Log_a(x) = 0$.
$\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$.
$\lim_{x\to 0} Log_a(x) = \infty$.

1.5. Límites de funciones a ramas

Si $f(x)$ es una **función a ramas**,

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < a_1 \\ f_2(x) & a_1 \leq x < a_2 \\ y_0 & x = a_2 \\ f_3(x) & x > a_2 \end{cases}$$

Para calcular el límite en x_0, siendo x_0 un punto distinto de a_1 o a_2, se calcula el límite como si no fuera una función a ramas (tomando como función la que corresponda al punto x_0). Para calcular el límite en a_1 o a_2 se calculan los limites laterales, por la derecha y por la izquierda usando la definición que corresponda. Así,

$$\begin{array}{ccc} \lim_{x\to a_1^-} f(x) = \lim_{x\to a_1^-} f_1(x) & \text{y} & \lim_{x\to a_1^+} f(x) = \lim_{x\to a_1^+} f_2(x) \\ \lim_{x\to a_2^-} f(x) = \lim_{x\to a_2^-} f_2(x) & \text{y} & \lim_{x\to a_2^+} f(x) = \lim_{x\to a_2^+} f_3(x) \end{array}$$

1.6. Límites 1^∞

Nota: Si nos damos cuenta en las funciones polinómica hemos resuelto indeterminaciones tipo $\infty - \infty$ y en las funciones racionales indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ y $0 \cdot \infty$. Veamos un método para resolver indeterminaciones del tipo 1^∞.

Aunque no es fácil de demostrar se tiene que si $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = e = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

En donde $e = 2,7182818284\cdots$. Por tanto si nos encontramos con un límite tipo 1^∞ lo que intentaremos será escribirlo de esta forma:

Ejemplos D (Limites 1^∞) $\star$ *Consideremos* $f(x) = (1 + \frac{1}{2x^2+x+1})^{3x^2+5x+3}$*. Entonces,* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *es una indeterminación tipo* 1^∞*. La forma de evitar esta indeterminación es:*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{2x^2+x+1})^{2x^2+x+1 \cdot \frac{3x^2+5x+3}{2x^2+x+1}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \left((1 + \frac{1}{2x^2+x+1})^{2x^2+x+1}\right)^{\frac{3x^2+5x+3}{2x^2+x+1}} \\ &= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x+3}{2x^2+x+1}} = e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$\star$ *Consideremos* $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{5x}}$*. Entonces tenemos,* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *es una indeterminación tipo* 1^∞*. La forma de evitar esta indeterminación es:*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (1 + \frac{1}{\frac{1}{2x}})^{\frac{1}{2x}\frac{2x}{5x}} = \lim_{x\to 0} \left((1 + \frac{1}{\frac{1}{2x}})^{\frac{1}{2x}}\right)^{\frac{2x}{5x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{2x}{5x}} = e^{2/5}$$

Nota: el límite cuando x tiende a cero de $\frac{1}{2x}$ no existe, pero para $x > 0$ es infinito y para $x < 0$ es menos infinito. Luego, en cualquier caso $\lim_{x\to 0}(1 + \frac{1}{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{x}} = e$.

1.7. Sucesiones y límites

Hasta este momento nos hemos centrado en calcular ciertos límites de funciones reales. Caso de no ser aplicables los resultados anteriores, nos será de utilidad tener un método por el que poder estudiar si cierto límite existe o no:

Definición 12 Se define una sucesión de números reales como una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Las sucesiones normalmente las denotaremos por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (en donde a_k denota $f(k)$).

Teorema 13 Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in [a, b]$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y es $l \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

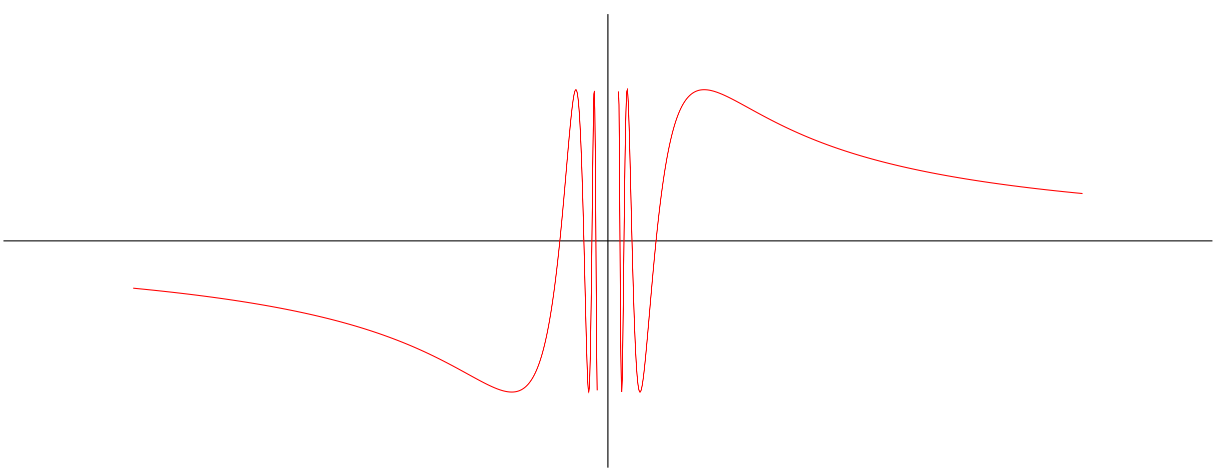
(ii) Si $\{a_n\} \subset (a, b) - \{x_0\}$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$.

Nota: Para calcular límites de sucesiones se usan las mismas técnicas que para calcular limites de funciones. No obstante, cuando al usar las técnicas de funciones, el limite no existe se puede calcular los términos de la sucesión para intentar determinar cual será su límite (Ver el siguiente ejemplo).

Ejemplos E Sea $f(x) = Sen(\frac{1}{x})$. El dominio de esta función es $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Por lo que se puede intentar calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$. Pero si tomamos $a_n := \frac{1}{2\pi n}$ y $b_n := \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ pero

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} Sen(2\pi n) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} Sen(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1.$$

Por lo que no existe este límite. Si representamos está función podemos comprender que ha pasado (a_n es una sucesión de puntos en donde la función siempre vale 1 y b_n es una sucesión de puntos en donde la función siempre vale 0):



Observar que cuando x tiende a cero la función va de -1 a 1.

2. Continuidad

Definición 1 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es continua en $x_0 \in [a, b]$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Definición 2 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es continua si es continua para cada $x_0 \in [a, b]$.*

Ejemplos A *Las funciones polinómicas, "las racionales", las trigonométricas y las exponenciales son continuas. Las funciones por casos hay que estudiarlas caso a caso (han sido estudiadas en los apartados anteriores).*

Teorema 3 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ aplicaciones continuas. Entonces:*

(i) $f + g$ *es continua.*

(ii) $f \cdot g$ *es continua.*

(iii) Si g no se anula, entonces $\frac{f}{g}$ es continua.

(iv) Si $f(x)$ es positiva, f^g es continua.

Nota: Para estudiar la continuidad de una función por ramas habrá que estudiar la continuidad en cada rama y en los puntos frontera de definición.

Definición 4 *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función y sea $x_o \in [a, b]$, Se dice que f tiene una discontinuidad evitable en x_0 si existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$, es un número real pero o no coincide con $f(x_0)$ o x_0 no pertenece al dominio de f.*

Nota: Por ejemplo, la función dada al principio del tema, ejemplo de la definición 1 (Pag. 45), tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$. Este tipo de discontinuidades aparecen principalmente en funciones a ramas (el ejemplo anterior) o en funciones racionales. Si pensamos en la función $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2+x}$ tenemos que el dominio de f es $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, -1\}$. No obstante,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + x} = -2, \qquad \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + x} = \nexists$$

Por lo que podemos definir f en cero como $f(0) = -2$ y evitamos esa "discontinuidad" en f. Es decir, podemos evitar la discontinuidad en 0 si definimos f como $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$.

Para todo $x \neq 0$ la función $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2+x} = \frac{(x-2)x}{(x+1)x} = \frac{x-2}{x+1}$, como $x \neq 0$ se puede simplificar (en está nueva función ya está definido el cero de forma continua, y vale -2).

3. Ejercicios del Tema

1 Calcula, si existen, los límites de las siguientes sucesiones en $\mathbb{R}$:
$a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = Sen(\frac{n\pi}{2})$, $c_n = \frac{Cos(n\pi)}{n+1}$, $d_n = Sen(\frac{\pi}{n+1})$,
$u_n = e^{\frac{7}{n}}$, $v_n = \frac{n^2+n+1}{n^2+2n}$, $w_n = ArcCotg(n^2+1)$, e^{-n}.

2 Calcula los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to a} \frac{x^5-5x^4-5x^3+45x^2-108}{x^5-15x^3-10x^2+60x+72}$, para $a=0$, $a=-2$, $a=3$ y $a=\infty$.

(b) $\lim_{x\to a} \frac{\ln(x)}{x-1}$, para $a=0$, $a=1$ y $a=\infty$.

(c) $\lim_{x\to a} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^5+3x^4+2x^3-2x^2-3x-1}$, para $a=\infty$, $a=-1$, $a=1$ y $a=-\infty$.

(d) $\lim_{x\to a} ln(x+3)$, para $a=-3$ y $a=\infty$.

(e) $\lim_{x\to a} ArcTg(Ln(x^2+x)))$, para $a=-\infty$, $a=0$, $a=1$ y $a=\infty$.

(f) $\lim_{x\to a} f(x)$, en donde $f(x) = \begin{cases} sen(x), & x<-5 \\ x^2+\ln(x), & -5\le x\le 1 \\ \frac{x^2-2x+1}{x^4-5x^2+6x-2}, & 1<x \end{cases}$ y los valores de a son $a=-\infty$, $a=-5$, $a=1$, y $a=\infty$.

3 Estudia el dominio y la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{ln(x)\sqrt{1-x}}{4x^2-1}$ (b) $g(x) = \begin{cases} ln(-x), & x\le 0 \\ x, & x>0 \end{cases}$

(c) $h(x) = \frac{lnx^2}{ArcTan(x)}$ (d) $q(x) = \frac{x^2+x}{x^3+x}$

¿Se puede extender de forma continua $q(x)$ al origen de coordenadas?

4 Calcula los siguientes límites:
(a). $\lim_{x\to 0} \frac{3x^4}{x^3+x^2}$ (b). $\lim_{x\to 5} \frac{x^4-25}{x^2-5x}$
(c). $\lim_{x\to\sqrt{5}} \frac{x-\sqrt{5}}{x^2-5}$ (d). $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+5x^2+10x+12}{x^3+2x^2-2x+3}$

5 *Dada la función:* $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & si\ x<2 \\ 4x-5 & si\ x\ge 2 \end{cases}$
Halla $f(2)$ y los límites cuando x tiende a 2 por la derecha y por la izquierda.

6 *Operando primero, calcula:* $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4} - \frac{x^2-4}{x-2}\right)$

7 *Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & si\ x\ne 1 \\ k & si\ x=1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x} & si\ x<0 \\ k & si\ x=0 \\ 2x+3 & si\ x>0 \end{cases}$$

8 *Determina p y q para que la función sea continua:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si\ x<0 \\ px+q & si\ 0 \leq x \leq 3 \\ x-5 & sí x>3 \end{cases}$$

9 *Analiza la discontinuidad de la función:*

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$$

en $x=1$, y calcula el límite de la función en ese punto.

10 *Para deshacer la indeterminación $\infty - \infty$, se multiplica y se divide por la expresión conjugada de la que ha producido la indeterminación. Con esta información calcula:*

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}\right)$

(b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-x\right)$

Capítulo 4

La derivada. Máximos y Mínimos

-
-

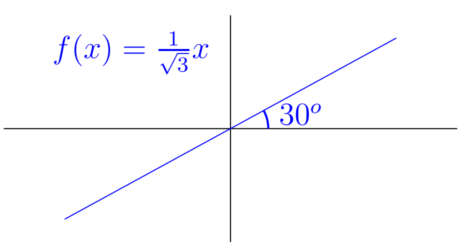
---

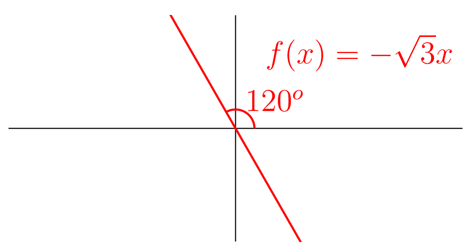
1. Introducción

La derivada está íntimamente relacionada con conceptos tanto de física como de geometría:

— **Respecto de la física**: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función que representa el espacio recorrido por un objeto (respecto del tiempo). Para cada h, $f(c+h) - f(c)$ es el espacio recorrido entre los tiempos c y $c+h$, por lo que el cociente $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ es la velocidad media en este periodo. Así, el límite cuando $h \to 0$ de estas velocidades (que no va a ser más que la derivada) no es más que la velocidad instantánea del objeto en el momento c.

— **Respecto de la geometría**: Dada una recta $Y = \alpha X + \beta$, nos encontramos con que α nos proporciona información sobre la pendiente de la recta. Realmente α es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje $\overline{\mathrm{OX}}$. Así, si α es positiva, la pendiente es ascendente y cuanto mayor sea α mayor será la pendiente, si α es negativa la pendiente es descendente y cuanto menor sea α mayor será la pendiente.





Dada una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ los cocientes $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ representan por tanto las pendientes de las rectas secantes (recta que corta a la curva pasando por los puntos $(c, f(c))$ y $(c+h, f(c+h))$, por lo que el límite representa la pendiente de la recta tangente que pasa por $(c, f(c))$.

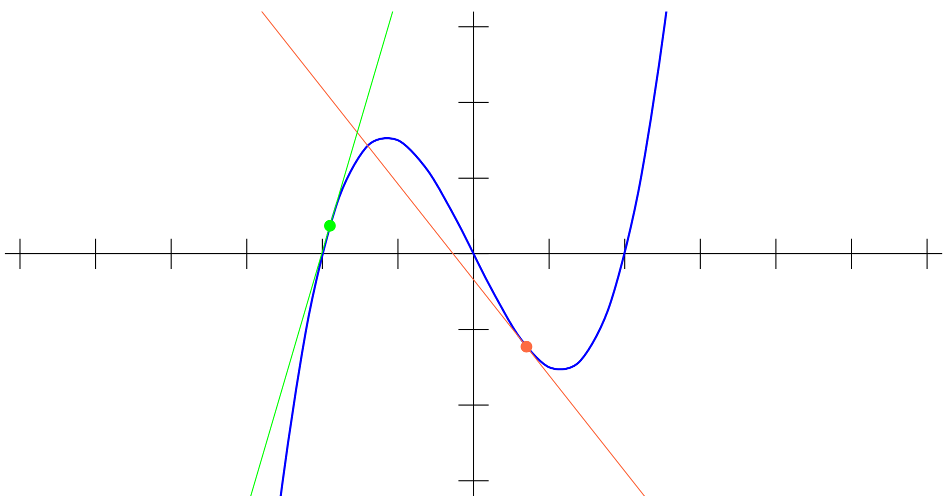
Definición 1 Dada una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ se dice que f es derivable en un punto $c \in (a,b)$ si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

y es un número real (si este límite no existe o es ∞ o $-\infty$ se dice que la derivada no existe) en este caso se denota a este límite por $f'(c)$, que recibe el nombre de derivada de f en c. Definimos la **función derivada**, que denotaremos por f', como la aplicación que a cada $x \in (a,b)$ le hace corresponder la derivada de f en x, es decir, $f'(x)$. Una notación que nos será útil para la derivada será $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$.

Nota: Si queremos calcular la recta tangente a una curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $(c, f(c))$ no tenemos más que calcular $f'(c)$ y nuestra recta será:

$$Y = f'(c)(X - c) + f(c)$$



Nota: Esta recta es la recta que más se aproxima a la función f en un entorno de $(c, f(c))$. En el campus virtual, Tema 4, encontraras el archivo Rectas tangentes en donde puedes experimentar sobre la recta tangente a una curva (las funciones $f(x) = x^3 - 2x$, $g(x) = Sen(x)$, y $h(x) = x^2 - 1$) en cada uno de sus puntos.

2. Cálculo de la Derivada.

Vamos a dar la derivada de las funciones más usuales de R en R:

Proposición 1 Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los reales y sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces, si

- $\star$ $f(x) = a$ $\Longrightarrow$ $f'(x) = 0$.
- $\star$ $f(x) = x^a$ $\Longrightarrow$ $f'(x) = ax^{a-1}$.
- $\star$ $f(x) = Ln(x)$ $\Longrightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{x}$.
- $\star$ $f(x) = Log_a(x)$ $\Longrightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{Ln(a)x}$.
- $\star$ $f(x) = e^x$ $\Longrightarrow$ $f'(x) = e^x$.
- $\star$ $f(x) = a^x$ $\Longrightarrow$ $f'(x) = Ln(a)a^x$.

Para las funciones trigonométricas tenemos que tener algo de cuidado, ya que la derivada que damos a continuación son cuando la variable x está en radianes:

$\star\ f(x) = Sen(x) \implies f'(x) = Cos(x).$
$\star\ f(x) = Cos(x) \implies f'(x) = -Sen(x).$
$\star\ f(x) = Tag(x) \implies f'(x) = \frac{1}{Cos^2(x)} = 1 + Tag^2(x).$
$\star\ f(x) = ArcSen(x) \implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt[2]{1+x^2}}.$
$\star\ f(x) = ArcCos(x) \implies f'(x) = \frac{-1}{\sqrt[2]{1+x^2}}.$
$\star\ f(x) = ArcCos(x) \implies f'(x) = \frac{-1}{\sqrt[2]{1+x^2}}.$
$\star\ f(x) = ArcTg(x) \implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$

El siguiente teorema nos va a dar las reglas para calcular derivadas de funciones más complicadas:

Teorema 2 Sean f, g funciones de variable real y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

(i) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

(ii) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$

(iii) $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x).$

(iv) $(\frac{1}{g(x)})' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$

(v) $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$

(vi) $(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$ (regla de la cadena).

Ejemplos A ★ Para la suma:

$$f(x) = x^3 + \cos(x), \quad \implies \quad f'(x) = 3x^2 - \operatorname{sen}(x).$$

★ Para el producto:

$$f(x) = x^3 \cos(x), \quad \implies \quad f'(x) = 3x^2 \cos(x) - x^3 \operatorname{sen}(x)$$

★ Multiplicación por un escalar:

$$f(x) = 5\tan(x), \quad \implies \quad f'(x) = \frac{5}{\cos^2(x)}.$$

★ Para el inverso:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}, \quad \implies \quad f'(x) = -\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 1)^2}.$$

★ Para el cociente:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2 + 2x + 1}, \quad \implies \quad f'(x) = -\frac{-\operatorname{sen}(x)(x^2 + 2x + 1) - \cos(x)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}.$$

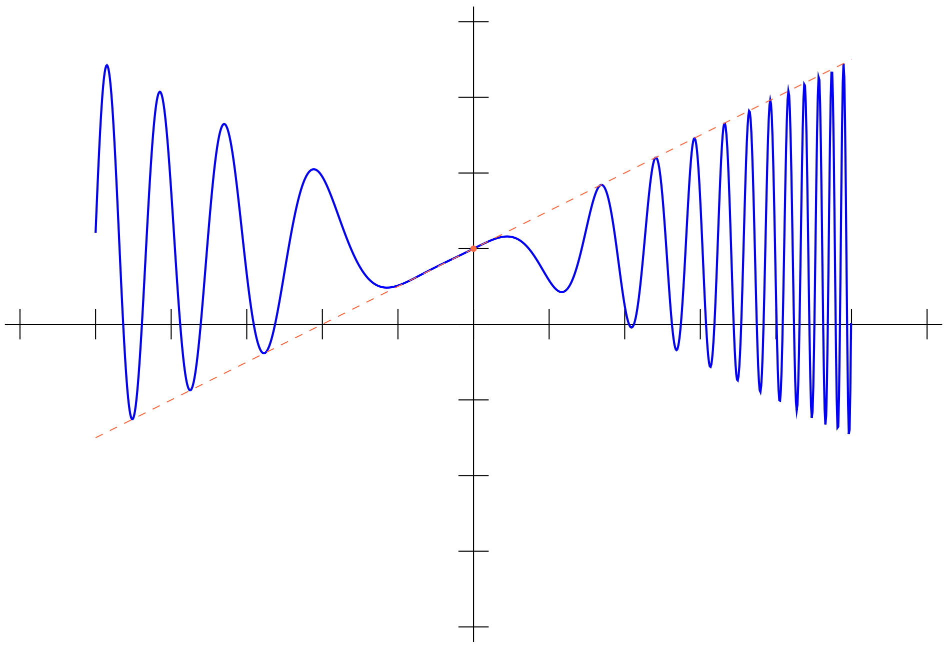
★ La regla de la cadena:

$$f(x) = \ln(\text{sen}(x)), \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = \cos(x)\frac{1}{\text{sen}(x)} = \tan(x).$$

★ Una complicada que mezcla todo: $f(x) = \frac{1}{2}xSen(x^2 + \frac{\pi}{2}2^x) + 1$, entonces:

$$f'(x) = \frac{1}{2}Sen(x^2 + \frac{\pi}{2}2^x) + \frac{1}{2}xCos(x^2 + \frac{\pi}{2}2^x)(2x + \frac{\pi}{2}Ln(2)2^x) + 0.$$

Además, como $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{2}$, la recta tangente a f que pasa por el punto $(0, 1)$ es $Y = \frac{1}{2}X + 1$.



Un resultado interesante que nos va a permitir calcular limites mucho más fácil es el llamado teorema de L'Hospital:

Teorema 3 Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in D$. Supongamos que f y g son funciones diferenciables en x_0 y que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$ y vale 0, infinito o menos infinito. Entonces

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Siempre que exista este último.

Nota: Observar que con este teorema somos capaces de evitar indeterminaciones tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Así, por ejemplo si queremos calcular el límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$$

Tenemos que $\lim_{x\to 1} x^3 - 2x^2 + x = 0$ y $\lim_{x\to 1} x^2 - 1 = 0$ pero,

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x} = \frac{0}{2} = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x} = \frac{0}{2} = 0$$

3. Estudio de una función

En esta última sección vamos a obtener la información relevante de una función $f : D \to \mathbb{R}$. Esto nos va a permitir representar dicha función. En toda esta sección vamos a trabajar con una función $f : D \to \mathbb{R}$. Como ejemplo vamos a considerar $f(x) = \frac{2x^2-2}{x^2-4}$

3.1. Dominio y puntos de corte con los ejes

En este primer punto debemos de determinar el dominio de f así como los cortes con los ejes $\overline{OX}$ y $\overline{OY}$.

. . . .

En nuestro ejemplo, $f(x) = \frac{2x^2-2}{x^2-4}$

• Al tratarse de una función racional, el dominio de f consiste en todo $\mathbb{R}$ salvo donde se anule el denominador. Por tanto. como

$$x^2 - 4 = 0 \implies x = 2 \text{ y } x = -2$$

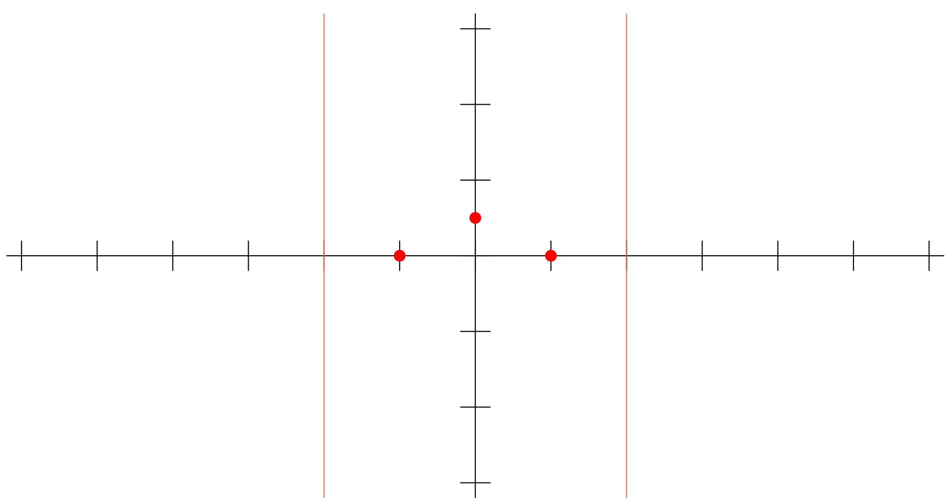
por lo que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

• los puntos de corte con el eje $\overline{OX}$ son los puntos donde la función se anula por lo que

$$f(x) = \frac{2x^2-2}{x^2-4} = 0 \implies 2x^2 - 2 = 0 \implies x = 1 \text{ y } x = -1$$

• El punto de corte con el eje $\overline{OY}$: $f(0) = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$ por lo que el punto es $(0, \frac{1}{2})$.

Los datos que tenemos hasta el momento son:



. . . .

3.2. Máximos y mínimos

En el estudio de los máximos y mínimos de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es muy útil el cálculo de la derivada de f, ya que en un máximo o un mínimo (es decir, en un extremo "local"), la derivada de f es cero. Esto se debe a que las rectas tangentes en los puntos correspondientes son horizontales (recordar que las pendientes de estas rectas son precisamente la derivada).

Nos damos cuenta aquí de algo más, no solo la derivada es cero en los máximos y mínimos "absolutos", sino también en los máximos y mínimos "locales". Introducimos el concepto de punto crítico (puntos en donde la derivada es cero) y damos condiciones necesarias y suficientes para que un punto crítico sea o un máximo o un mínimo. Empezamos recordando los siguientes conceptos:

Propiedades 1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que

- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **máximo absoluto** para f si para todo $y \in \mathbb{R}$, $f(y) \leq f(x_0)$.
- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **máximo absoluto estricto** para f si para todo $y \in \mathbb{R}$, $y \neq x_0$, $f(y) < f(x_0)$.
- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **máximo local** para f si existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}$ con $|x_0 - y| \leq \epsilon$ se tiene que $f(y) \leq f(x_0)$.
- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **máximo local estricto** para f si existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}$ con $0 \neq |x_0 - y| \leq \epsilon$ se tiene que $f(y) < f(x_0)$.
- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **mínimo absoluto** para f si para todo $y \in \mathbb{R}$, $f(y) \geq f(x_0)$.
- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **mínimo absoluto estricto** para f si para todo $y \in \mathbb{R}$, $y \neq x_0$, $f(y) > f(x_0)$.
- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **mínimo local** para f si existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}$ con $|x_0 - y| \leq \epsilon$ se tiene que $f(y) \geq f(x_0)$.
- $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **mínimo local estricto** para f si existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}$ con $0 \neq |x_0 - y| \leq \epsilon$ se tiene que $f(y) > f(x_0)$.

Definición 2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se dice que un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **punto crítico** para f si $f'(x_0) = 0$.

Teorema 3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea x_0 un extremo local para f. Entonces x_0 es un punto critico para f.

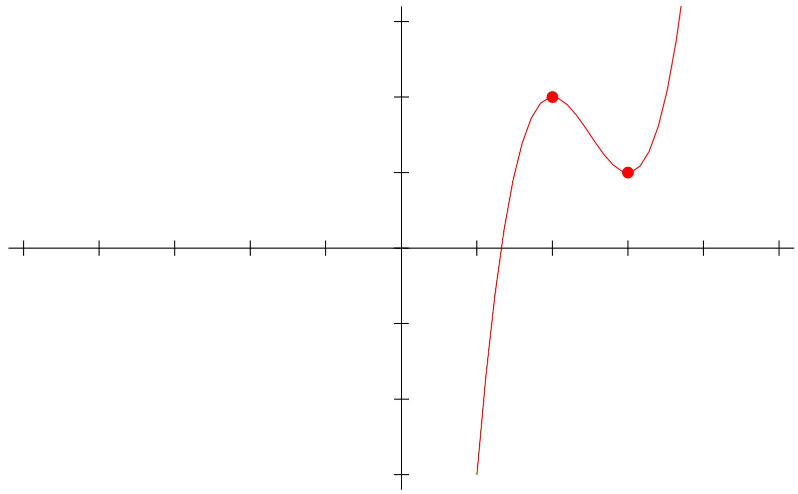
Nota: Si queremos calcular los máximos y los mínimos de una función diferenciable, calcularemos en primer lugar sus puntos críticos.

Ejemplos A *Se sabe que la función $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 26$ tiene un máximo y un mínimo local en $\mathbb{R}$. ¿Cuales son?*

Calculemos los puntos críticos de f: la derivada de f es $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$ y por tanto los puntos críticos son:

$$x = \frac{30 \pm \sqrt[2]{900 - 864}}{12} = 2 \text{ y } 3$$

Como nos dicen que f alcanza un máximo y un mínimo local en $\mathbb{R}$, uno será máximo y el otro mínimo. Aunque todavía no sabemos distinguirlos, vamos a representar gráficamente la función para saber cual es cual.



Luego 2 es un máximo local y 3 es un mínimo local para f.

El siguiente teorema nos va a dar una condición para saber distinguir cuando un punto critico es un máximo, un mínimo o no es ninguno de ambos.

Teorema 4 *Sea $f : D \to R$ una función (derivable todas las veces que haga falta) y sea $x_0 \in D$ tal que $f'(x_0) = 0$ (es decir, x_0 es un punto critico de f). Entonces:*

(i) Si $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es un mínimo local para f.

(ii) Si $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo local para f.

(iii) Si $f''(x_0) = f^{3)}(x_0) = \cdots = f^{n)}(x_0) = 0$:

- ⋆ *Si n es impar y $f^{n+1)}(x_0) > 0$, entonces x_0 es un mínimo local para f*
- ⋆ *Si n es impar y $f^{n+1)}(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo local para f*
- ⋆ *Si n es par, x_0 no es ni máximo ni mínimo para f.*

....

En nuestro ejemplo, $f(x) = \frac{2x^2-2}{x^2-4}$

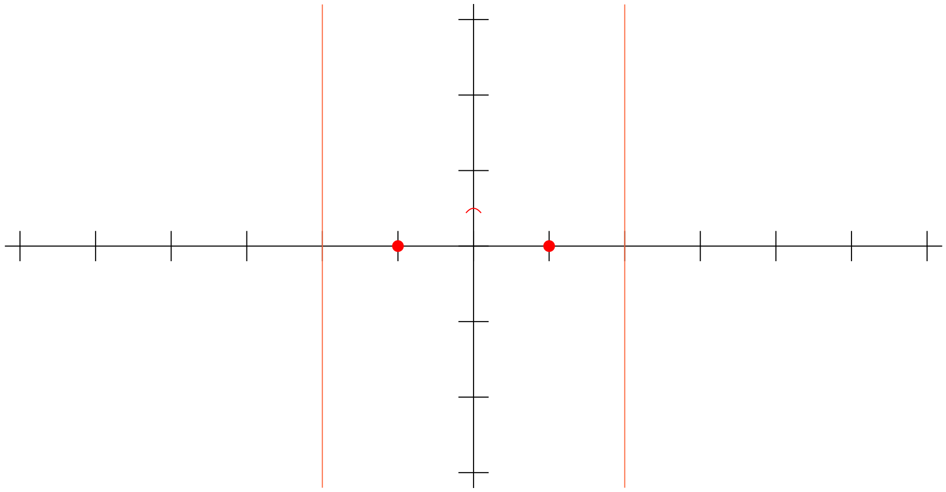
La derivada de $f(x)$, siguiendo la reglas de derivación dadas en el Teorema 2 (Pag. 61), es

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-4) - 2x(2x^2-2)}{(x^2-4)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3 + 4x}{(x^2-4)^2} = \frac{-12x}{(x^2-4)^2}$$

Así, $f'(x) = 0 \iff -12x = 0 \iff x = 0$. Es más,

$$f''(x) = \frac{-12(x^2-4)^2 - 2(x^2-4)(2x)(-12x)}{(x^2-4)^4} = \frac{-12(x^2-4)^2 + 48x^2(x^2-4)}{(x^2-4)^4}$$

Y por tanto, $f''(0) = \frac{-12 \cdot 16}{(-4)^4} < 0$ por lo que $x = 0$ es un máximo.



. . . .

3.3. Crecimiento decrecimiento

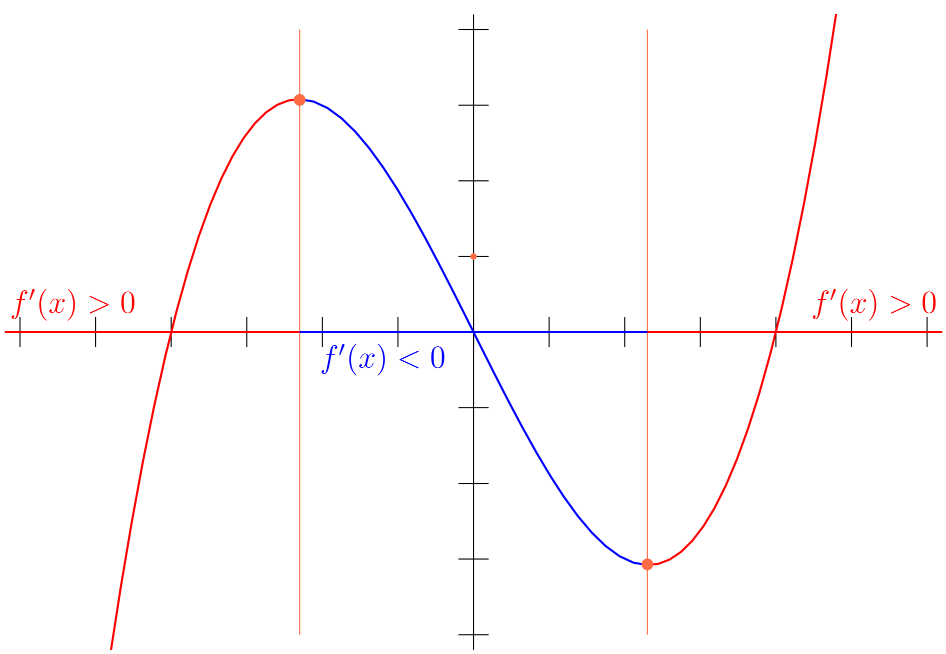
El signo de la derivada de una función $f : D \to \mathbb{R}$ también es una información relevante de la función. Así, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5 *Sea $f : D \to R$ una función (derivable todas las veces que haga falta) y sea $x_0 \in D$. Entonces*

(i) Si $f'(x_0) > 0$, la función f es creciente en x_0.

(ii) Si $f'(x_0) < 0$, la función f es decreciente en x_0.

Veamos un ejemplo: Sea $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - 2x$. Tenemos que $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2$. Por tanto los puntos críticos de f son $x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ y $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ por tanto $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -\frac{4}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{4}{\sqrt{3}}, \infty)$ y $f'(x) < 0$ en $(-\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}})$.

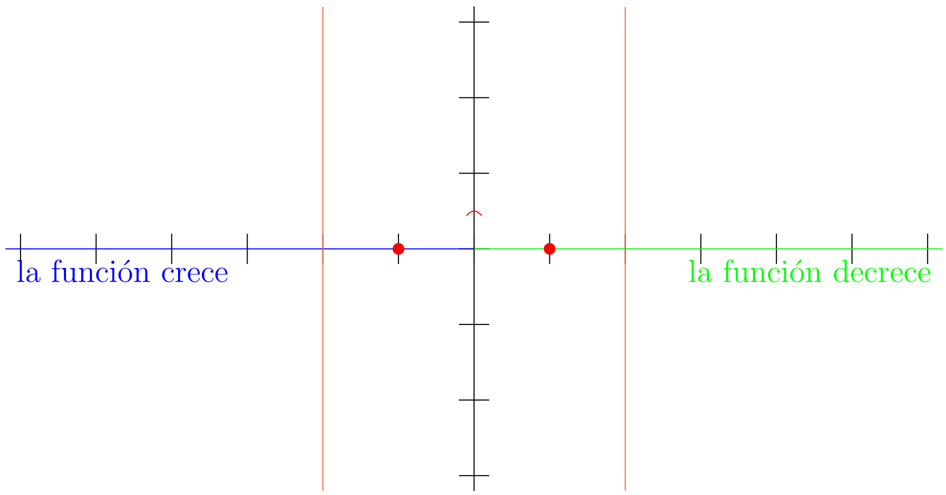


. . . .

En nuestro ejemplo, $f(x) = \frac{2x^2-2}{x^2-4}$

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-4) - 2x(2x^2-2)}{(x^2-4)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3 + 4x}{(x^2-4)^2} = \frac{-12x}{(x^2-4)^2}$$

Por tanto, $f'(x) < 0$ en el intervalo $(0, \infty)$ (ya que el denominador siempre es positivo), por lo que la función en este intervalo decrece y $f'(x) > 0$ en el intervalo $(-\infty, 0)$, por lo que en este intervalo la función crece.



. . . .

3.4. Asíntotas

Debemos de calcular ahora las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, ver la definición 9 (Pag. 49).

. . . .

En nuestro ejemplo, $f(x) = \frac{2x^2-2}{x^2-4}$

• Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2-2}{x^2-4} = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-2}{x^2-4} = 2$$

Por tanto, como hay asíntotas verticales, no nos podemos encontrar asíntotas oblicuas (ya sabemos que no había asíntotas oblicuas, ya que para que existan en funciones racionales, el grado del numerador tiene que ser uno mas que el grado del denominador).

• Asíntotas Verticales: Sabemos que estas se encuentran donde se anula el denominador, por tanto (para resolver este límite hay que factorizar)

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2-2}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-2)} \frac{1}{(x+2)} =$$

Por tanto, el limite no existe, ya que (x+2) esta elevado a un número impar, pero si los límites laterales (siempre sucede en funciones racionales)

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{2x^2-2}{x^2-4} = \lim_{x \to -2^-} \left(\frac{2(x-1)(x+1)}{(x-2)}\right) \left(\frac{1}{(x+2)}\right) = \infty$$

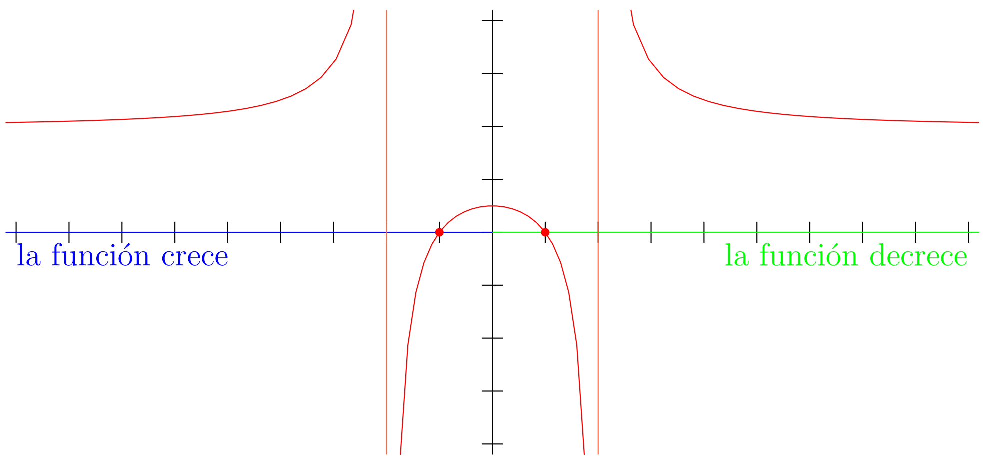
Ya que $\lim_{x\to -2^-} \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-2)} = \frac{2(-3)(-1)}{-1} < 0$ y $\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$ (es una traslación de la función $\frac{1}{x}$). Calculando de la misma forma,

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{2x^2-2}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^+} \left(\frac{2(x-1)(x+1)}{(x-2)}\right)\left(\frac{1}{(x+2)}\right) = -\infty$$

Y para $x = 2$,

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2-2}{x^2-4} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-2}{x^2-4} = \infty$$

Por tanto, si reunimos todos los datos, ya podemos pintar la gráfica:



. . . .

Nota: Por último decir que existen conceptos tales como convexidad y concavidad o puntos de inflexión que también son interesantes en el estudio de la gráfica de una función pero que no estudiaremos en este tema.

Bibliografía

[1] Frank Ayres and Lloyd Jaisingh. *Abstract Algebra.* McGraw-Hill, 2004.

[2] P.M. Cohn. *Algebra.* John Wiley& Sons, 1989.

[3] Juan de Burgos. *Curso de Álgebra y Geometría.* Alhambra Universidad, 1980.

[4] John B. Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, 1982.

[5] Thomas W. Hungerford. *Algebra.* Springer, 1974.

[6] W. Keith Nicholson. *Introduction to Abstract Algebra.* John Wiley& Sons, 1999.

[7] D. Martín P. Alberca. *Métodos Matemáticos.* Ediciones Aljibe, 2001.

[8] J. Dorronsoro y E. Hernández. *Números, Grupos y Anillos.* Addison- Wesley, 1996.

Nomenclatura

$-$	Diferencia, página 3
$=$	igual, página 2
$=$	igualdad de aplicaciones, página 15
$\cap$	intersección, página 3
$\mathrm{CoDom}(f)$	Codominio, página 14
$\cup$	Unión, página 3
$\mathrm{Dom}(f)$	Dominio, página 14
$\emptyset$	conjunto vació, página 2
$\exists$	Existe, página 14
$\forall$	Para todo, página 14
Id_X	aplicación identidad en X, página 16
$\iff$	si y sólo si, página 2
$\mathrm{Im}(f)$	imagen, página 15
$\in$	pertenece, página 2
$\mathbb{N}$	El conjunto de los números naturales, página 2
$\mathbb{Z}$	Los Números Enteros, página 6
$\neq$	desigual, página 2
$\not\subset$	no contenido, página 2
$\notin$	no pertenece, página 2
$\overline{X}$	Complemento, página 3
$\Rightarrow$	implica, página 2
$\subset$	Contenido, página 2
$\subsetneq$	estrictamente contenido, página 2
$\times$	Producto cartesiano, página 3
$\triangle$	Diferencia simétrica, página 3
$\mid$	tal que, página 14
$f(A)$	imagen de un subconjunto, página 15
f^{-1}	aplicación inversa, página 17
$f^{-1}(Y')$	imagen inversa de un subconjunto, página 15
$g \circ f$	composición de aplicaciones, página 16
$\mathcal{P}(X)$	Partes de un conjunto, página 2

Índice alfabético