ÍNDICE

V. Anillos de división. Teoremas de conmutatividad.

Lección 22: Algunas construcciones de anillos de división.
Lección 23: El Teorema de Frobenious.
Lección 24: Teoremas de conmutatividad.

Bibliografía del Tema V.

VI. Anillos semiprimos con zócalo esencial.

Lección 25: El zócalo de un anillo.
Lección 26: Descomposición del zócalo de un anillo semiprimo.
Lección 27: Estructura geométrica de los anillos primos con zócalo no nulo.

Bibliografía del Tema VI.

VII. Anillos semiperfectos.

Lección 28: Anillos locales y semilocales.
Lección 29: Anillos semiperfectos.
Lección 30: Anillos semiperfectos de cocientes simples.
Lección 31: Anillos semiperfectos no unitarios.

Bibliografía del Tema VII.

VIII. Anillos de cocientes. Teoremas de Goldie.

Lección 32: Localización en anillos no conmutativos.
Lección 33: Ordenes clásicos por la izquierda. Condición de Ore.
Lección 34: Anillos generales de cocientes por la izquierda.
Lección 35: Anillos de Goldie por la izquierda. El Teorema clásico de Goldie.
Lección 36: Los teoremas de Johnson y Gabriel.
Lección 37: El Teorema de Faith-Utumi.

Bibliografía del Tema VIII.

IX. PI-Anillos

Lección 38: Identidades polinómicas.
Lección 39: Álgebras centrales simples. El Teorema de Kaplasky.
Lección 40: La conjetura de Göthe.
Lección 41: Polinomios centrales. El Teorema de Posner.

Bibliografía del Tema IX.

X. Categorías. Teoría de Morita.

Lección 42: Categorías.
Lección 43: Contextos de Morita. El Teorema de Morita I.
Lección 44: El Teorema de Wedderburn-Artin.
Lección 45: Más Teoría de Morita.

Bibliografía del Tema X.

Bibliografía general.

Introducción

El presente programa ha sido pensado para ser impartido en una asignatura optativa, de 15 créditos, del segundo ciclo de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Málaga denominada Teoría de Anillos.

Gracias a su carácter optativo de segundo ciclo, los alumnos matriculados en esta asignatura suelen no sólo haberse enfrentado a asignaturas propias del álgebra sino a tener una clara predilección por éstas. Nos encontramos con alumnos que han cursado, normalmente, las siguientes asignaturas:

– *Estructuras algebraicas*, asignatura troncal de primer curso, en donde se estudia en un primer cuatrimestre teoría de grupos y en un segundo cuatrimestre teoría de anillos. En esta asignatura se ven las construcciones de generación de nuevos grupos (anillos) a partir de otros como pueden ser los subgrupos (subanillos), las sumas directas, los productos directos, así como las estructuras cociente. Se ven los primeros teoremas de clasificación: se determinan los grupos abelianos finitos y los finitamente generados, llegando a resultados complejos como pueden ser, en el primer cuatrimestre, los Teoremas de Sylow y, en el segundo cuatrimestre, el estudio de los dominios de ideales principales y los dominios de factorización única.

– *Álgebra y Geometría*, asignatura troncal de primer curso, en donde se estudian los espacios vectoriales, las aplicaciones lineales y los sistemas de ecuaciones lineales. Nos encontramos aquí con que se insiste en los conceptos de subestructura, de suma directa, producto directo y de estructura cociente.

– *Álgebra Clásica*, asignatura troncal de tercer curso, en donde se estudian fundamentalmente extensiones de cuerpos. Con esta asignatura los alumnos aprenden cómo ciertos problemas de la matemática pueden ser extrapolados de una rama de la matemática a otra para ser resueltos. Así, con no muchas nociones de extensiones de cuerpos se resuelven los tres problemas griegos de si es posible duplicar el cubo, trisecar el ángulo, o cuadrar el círculo. Así como, gracias al Teorema de Galois, calcular todos los cuerpos intermedios de ciertas extensiones de cuerpos determinando los subgrupos de un cierto subgrupo finito.

– *Álgebra homológica*, optativa de tercer curso, en donde estudia por primera vez la noción de categoría. Se introducen los funtores derivados y más concretamente los funtores Ext y Tor estudiándose la cohomología de grupos y de álgebras.

El proyecto que aquí presentamos gira básicamente en torno a la teoría de estructura de los anillos asociativos, no necesariamente conmutativos o unitarios. Nos interesará, no sólo el conjunto de resultados obtenidos, sino también introducir al alumno en los conceptos propios del álgebra y obtener de él una respuesta activa que le impulse a preguntarse el porqué de cada cosa.

La teoría moderna de anillos comienza cuando J.H.M. Wedderburn, en 1907, demuestra su teorema de clasificación de las álgebras semisimples de dimensión finita sobre cuerpos (Wedderburn define el radical de un álgebra de dimensión finita como el mayor ideal nilpotente del álgebra; cuando éste es cero llama al álgebra semisimple). Veinte años mas tarde, en 1927, E. Noether y E. Artin introducen las condiciones de cadena ascendentes (CCA) y descendentes (CCD) para ideales por la izquierda y Artin extiende los métodos desarrollados por Wedderburn a la clase de los anillos que verificaban CCA y CCD para ideales por la izquierda (actualmente sólo CCD, ya que por el Teorema de Hopkins-Levitzki CCD implica CCA) demostrando que en estas álgebras también existe un ideal nilpotente maximal, por lo que sigue teniendo sentido el radical definido por Wedderburn, y obteniendo un teorema de estructura, análogo al de Wedderburn, para anillos con radical cero que verifican CCA y CCD.

En esencia el Teorema de Wedderburn-Artin determina la clase de los anillos semisimples en función de una clase más "simple" de anillos, los anillos de división.

La teoría general de clasificación de anillos comienza con el Teorema de Densidad de Jacobson (que en esencia generaliza el Teorema de Wedderburn-Artin a la clase de los anillos primitivos). El siguiente paso consiste, usando la noción de producto subdirecto de anillos, en extender el estudio a la clase de los anillos semiprimitivos. La última etapa, pasar de los anillos semiprimitivos a anillos arbitrarios, conlleva el estudio de distintos radicales, que no son más que la parte "mala" del anillo que hace que sea imposible de "clasificar". El "mayor", el radical de Jacobson, que denotaremos por $rad(R)$, caracteriza a los anillos semiprimitivos; el nilradical superior, $Nil^*(R)$, caracteriza a los anillos que no contienen ideales nil y el nilradical inferior, $Nil_*(R)$, determina qué anillos son semiprimos.

El procedimiento descrito anteriormente no ha permitido hasta la fecha clasificar completamente los anillos en general, ya que el estudio de las clases radicales resulta muy complejo. Sin embargo, sí es plenamente satisfactorio en ciertas clases de anillos. Así, si un anillo R es artiniano se tiene que su radical es nilpotente, que el cociente $R/rad(R)$ es semisimple artiniano y que se pueden elevar idempotentes módulo $rad(R)$. Con estas propiedades, aplicando un teorema similar al de Wedderburn-Artin, se determinan estos anillos en función de unos más "simples", los anillos locales.

Respecto a la estructura de la asignatura, dividimos ésta en diez temas, cada uno de los cuales estará a su vez subdividido en lecciones. Consideramos que una vez finalizado el curso el alumno debe tener, a la vez que una clara idea de las distintas clasificaciones que se han hecho a lo largo del curso, una amplia gama de anillos que concreten los conocimientos texnicos adquiridos. Por tanto, a lo largo del curso se irán introduciendo, como ejemplos y contraejemplos de ciertas propiedades, distintas construcciones de anillos.

Comenzamos con un primer tema dedicado a una teoría general de módulos. Una vez introducidas las definiciones básicas y dadas las primeras construcciones de módulos, se estudian los módulos libres. Una clase más natural de módulos, desde un punto de vista homológico, es la de los módulos proyectivos. Estudiamos distintas caracterizaciones de módulos proyectivos, algunas de ellas categóricas. Un concepto dual al de módulo proyectivo, y que nos será de utilidad a lo largo del curso, es el de módulo inyectivo. Una vez vista distintas caracterizaciones de módulos inyectivos nos centraremos en demostrar la existencia (y unicidad) de la envolvente inyectiva de un módulo. Con este resultado construiremos la envolvente racional de ciertos módulos, lo que nos servirá para dar una construcción bastante aséptica del anillo de cocientes por la izquierda maximal de un anillo sin divisores totales de cero por la derecha. Estudiamos los módulos artinianos y noetherianos, relacionándolos con los módulos de longitud finita, y establecemos el Teorema de refinamiento de Schreier así como el Teorema de Jordan-Hölder.

Encaminados al Teorema de Krull-Schmidt introducimos las nociones de módulo indescomponible y módulo fuertemente indescomponible. El Teorema de Krull-Schmidt fue formulado por primera vez para grupos finitos por J.H.M. Wedderburn en 1909. Su demostración contenía un error que fue subsanado por R. Remak en 1911. En 1925, W. Krull extendió dicho resultado para grupos abelianos con operadores, y por tanto para módulos. En 1928, O. Schmidt lo probó para grupos arbitrarios con operadores. En 1932 W. Krull planteó la cuestión de si el Teorema seguiría siendo válido para módulos artinianos. La respuesta, negativa, la dieron Facchini, Herbera, Levy y Vámos y fue presentada en el congreso "Ring Theory Conference" que tuvo lugar en Miskolc, Hungría, durante los días 15 al 20 de Junio de 1996.

Seguimos en el Tema 1 estudiando los módulos simples y semisimples. Caracterizamos éstos últimos como aquéllos que verifican que el retículo de sus submódulos es complementado. Nos centramos por último en el zócalo de un módulo y demostramos que éste es suma directa de sus componentes homogéneas. Este resultado llevará a descomponer el zócalo de un anillo como suma directa de ideales, cada uno de los cuales será simple y coincidirá con su zócalo.

En el Tema 2 se introducirán los anillos semisimples y se darán distintas caracterizaciones, algunas homológicas, de los mismos. En una segunda parte se estudiarán los anillos de matrices sobre anillos unitarios. Relacionando el retículo de los ideales (resp. ideales por la izquierda) de un anillo unitario R con los de $\mathcal{M}_n(R)$ se demostrará que todo anillo de matrices sobre un anillo de división es simple y artiniano. Es más, por el Teorema de Wedderburn-Artin, todo anillo simple y artiniano y "unitario" será de esta forma. En este punto se verán varios ejemplos de anillos simples no artinianos: si consideramos V un espacio vectorial de dimensión numerable y denotamos por Q a $End(V)$, tenemos que $R := Q/Soc(Q)$ es un anillo simple no artiniano. Además R posee la peculiaridad de que contiene dos subanillos R', R'' tales que $R = R' \oplus R''$ con $R \cong R'$ y $R'' \neq 0$. Los anillos que verifican esta propiedad son llamados puramente infinitos, estos anillos están siendo actualmente estudiados entre otros por P. Ara, E. Pardo y K.R. Goodearl (Algebra Conference Venezia 2002).

Introducimos también los anillos de polinomios diferenciales, $R[X, \delta]$. Tenemos que $R[X, \delta]$ es un anillo no conmutativo (salvo cuando R es conmutativo y δ es la derivación nula) que nos irá apareciendo a lo largo del curso. Es más, si R es un anillo simple de característica cero y δ no es una derivación interna, $R[X, \delta]$ es un anillo simple y unitario que no es artiniano.

En el Tema 3 empezamos estudiando los anillos primitivos y semiprimitivos. Estos segundos quedarán caracterizados como los que son sumas subdirectas de anillos

primitivos. Los primeros, a partir del Teorema de Densidad de Jacobson, podrán verse como subanillos densos de anillos de endomorfismos de espacios vectoriales sobre
anillos de división. La dimensión de este espacio vectorial caracterizará a los (primitivos y) artinianos, lo que permitirá demostrar entre otros el Teorema de Kaplansky que caracteriza los P.I. anillos primitivos como anillos de matrices sobre anillos de división, éstos de dimensión finita sobre su centro.

Una pregunta que tiene que empezar a aparecer entre los alumnos es si las estructuras que aparecen en el Teorema de Densidad de Jacobson son únicas salvo isomorfismos. Nos encontramos que en el caso de anillos de polinomios sobre anillos de división, en el caso de anillos de polinomios asimétricos $K[X, \sigma]$, así como en el de anillos de polinomios diferenciales $K[X, \delta]$ hay ejemplos de anillos primitivos por la izquierda sin unicidad, salvo isomorfismos, de estas estructuras.

Estudiamos en este tema los anillos primos y semiprimos, lo que permite dar nuevas caracterizaciones de los anillos semisimples y unitarios, esto es, nuevas versiones del Teorema de Wedderburn-Artin. Cabe destacar que en esta nueva demostración del Teorema de Wedderburn-Artin no es necesario en principio trabajar con anillos unitarios, por lo que se obtendrá como consecuencia que los anillos semiprimos y artinianos son unitarios.

Pasamos a estudiar en el Tema 4 una teoría general de radicales. La idea de radical está ligada a la teoría de estructura. La noción de radical proviene, como ya se ha dicho, de un trabajo de Wedderburn en donde determina la estructura de ciertas algebras de dimensión finita. En general, dada una clase de anillos $\mathcal{C}$ se pretende determinar para cada anillo $R \in \mathcal{C}$ un ideal, $\mathcal{R}(R)$, tal que podamos describir tanto $\mathcal{R}(R)$ como $R/\mathcal{C}(R)$.

En 1953 A.G. Kurosh y S. Amitsur extraen las nociones generales que subyacen en la teoría de radicales, fundamentando una teoría axiomática para el radical. Nos encontramos entonces con dos subclases dentro de $\mathcal{C}$: la clase de los anillos que coinciden con su radical, llamada la clase radical, y la clase de los anillos que tienen radical cero, llamada la clase semisimple, de modo tal que para cualquier anillo $R \in \mathcal{C}$, $\mathcal{R}(R)$ es radical y $R/\mathcal{R}(R)$ es semisimple. Según el radical que estudiemos podremos describir con mayor o menor detalle cada una de estas clases.

Comenzamos estudiando el radical de Jacobson de un anillo. Demostramos que los anillos con radical de Jacobson cero son precisamente los semiprimitivos, por lo que quedan descritos via productos subdirectos y Teorema de Densidad de Jacobson. En cuanto a los que coinciden con su radical quedan descritos como aquellos anillos tales que todos sus elementos son casirregulares. En este segundo caso tenemos una gran variedad de anillos, ya que nos encontramos desde los anillos nilpotentes hasta algunos anillos conmutativos sin divisores de cero. En el caso de anillos artinianos comprobamos que el radical de Jacobson es nilpotente, por lo que tenemos descritas de forma satisfactoria ambas clases, la radical y la semisimple (en el Tema 7, cuando estudiemos los anillos semiperfectos, obtendremos una mejor descripción de estos anillos). Para concluir demostraremos el Teorema de Hopkins-Levitzki que establece que todo anillo unitario y artiniano por la izquierda es noetheriano por la izquierda.

Introducimos el radical primo o nilradical inferior de un anillo, y caracterizamos los anillos semiprimos como aquéllos que tienen nilradical inferior cero. Tenemos entonces que el radical primo está contenido en el radical de Jacobson. Demostramos que el radical primo es un ideal nil, por lo que queda mejor descrito que el radical de Jacobson. Por contra, los anillos de nilradical inferior cero, es decir, los semiprimos, son una clase de anillos bastante heterogénea. No obstante, demostramos que el nilradical inferior es la intersección de todos los ideales primos, lo que prueba que todo anillo semiprimo es producto subdirecto de anillos primos.

Nos encontramos con anillos que, aun siendo semiprimos, tienen ideales nil. Definimos el nilradical superior, que resulta ser el mayor ideal nil del anillo y demostramos que el cociente de un anillo R por su nilradical superior no posee ideales nil.

En relación con este nilradical enunciamos la conjetura de Köthe que afirma, en uno de sus enunciados equivalentes, que el nilradical superior es el mayor ideal por la izquierda, y por la derecha, nil. Por último observamos que los anillos artinianos, así como los conmutativos, verifican dicha conjetura y demostramos el Teorema de Levitzki que afirma que todo anillo noetheriano por la izquierda también la verifica. En el tema de P.I. anillos demostraremos que también éstos verifican la conjetura de Köthe. Estudiamos por último el radical de Levitzki de un anillo y relacionamos los distintos radicales estudiados.

Hasta este momento, aunque no se haya dicho, nuestra filosofía ha consistido en parte en considerar a los anillos de división como los objetos más simples y a la vez más perfectos con los que se puede trabajar y así, en temas anteriores, hemos determinado ciertas clases de anillos en función de éstos. Hecho por el cual pensamos que una teoría de estructura de anillos asociativos no está completa si no se hace un estudio en profundidad de dichos anillos de división. Dedicamos el Tema 5 a este estudio.

Clásicamente, los anillos de división se han dividido (valga la redundancia) en dos categorías: los que tienen dimensión finita sobre su centro y los que no. En este tema no vamos a hacer ninguna distinción de este tipo. No obstante, en el Tema 9, cuando estudiemos los P.I. anillos primos, veremos que los primeros poseen una estructura bastante próxima a los anillos conmutativos, es más, los anillos de división de dimensión finita sobre su centro, es decir, los P.I. anillos, los veremos como subanillos de anillos de matrices sobre cuerpos algebraicamente cerrados.

Comenzamos el tema dando algunos ejemplos de anillos de división. Aunque pueda parecer sorprendente, el único ejemplo de anillo de división no conmutativo que conocen los alumnos hasta este momento es el de los cuaternios de Hamilton. Nuestra primera construcción proviene de un trabajo de D. Hilbert publicado en 1899, que proporcionó el primer ejemplo de anillo de división de dimensión infinita sobre su centro. Seguimos con las álgebras cíclicas de L. Dickson, construidas en el año 1906 y por último construimos los anillos de Malcev-Neumann, que proporcionan una clase aún más amplia que las dos anteriores de anillos de división. En la siguiente lección determinamos los anillos de división algebraicos sobre el cuerpo de los reales (Teorema de Frobenius). Para finalizar el tema damos distintos teoremas de conmutatividad. Así, recordamos el Teorema de Wedderburn, que demuestra que todo anillo de división finito es cuerpo, probamos que todo anillo de división algebraico sobre un cuerpo finito es cuerpo y demostramos el Teorema de Jacobson-Herstein que establece que un anillo R tal que para cada par de elementos $a, b \in R$ existe $n = n_{(a,b)} \in \mathbb{N}$ tal que $(ab - ba)^n = ab - ba$, es conmutativo.

En el Tema 6 vamos a estudiar la clase de los anillos semiprimos con zócalo esencial. Recordemos que el zócalo de un anillo semiprimo es el mayor ideal semi-simple del anillo y que los anillos semisimples y unitarios ya los hemos estudiado en el Tema 2, resultando ser, por el Teorema de Wedderburn-Artin, sumas directas finitas de anillos de matrices sobre anillos de división, esto es, sumas directas finitas de anillos de endomorfismos de espacios vectoriales de dimensión finita sobre anillos de división. Si nos centramos en el estudio de los anillos primos que coinciden con su zócalo nos encontramos con que éstos son una generalización bastante natural de los anillos primos y artinianos, ya que son anillos de endomorfismos de rango finito de espacios vectoriales sobre anillos de división. Por otro lado, los anillos semiprimos que coinciden con su zócalo son suma directa de los anteriores. Una relación más directa de estos últimos con los anillos semiprimos y artinianos la proporciona el Teorema de Litoff, que establece que para cada subconjunto finito X de un anillo semiprimo que coincide con su zócalo R existe un idempotente $e \in R$ tal que $X \subset eRe$, en donde eRe es un subanillo de R semiprimo y artiniano.

Por último, los anillos semiprimos con zócalo esencial son productos subdirectos de anillos primos con zócalo no nulo, por tanto esencial, y estos últimos pueden verse como subanillos de anillos de endomorfismos de espacios vectoriales de dimensión arbitraria, en donde su zócalo resulta ser el conjunto de los elementos del anillo de rango finito. Aunque en principio pueda parecer que los anillos semiprimos con zócalo esencial se han alejado de los semiprimos y artinianos, no es del todo cierto, ya que cualquier condición de finitud los convierte en éstos, así, el carácter noetheriano o la dimensión uniforme finita hace que un anillo semiprimo con zócalo esencial sea semiprimo y artiniano. Para un anillo semiprimo que coincide con su zócalo, se pueden ampliar las condiciones anteriores con tres más: el poseer un elemento unidad, el tener un elemento regular, por la izquierda o por la derecha, o el ser finitamente generado.

Hasta este momento hemos tratado, obteniendo una teoría bastante satisfactoria, con anillos de radical de Jacobson cero. En este tema daremos un pequeño bocado a la maraña de los anillos que no son semiprimitivos. Nos preguntaremos en primer lugar qué sucede con los anillos tales que módulo su radical son semisimples, es decir, los anillos semilocales. Ya estudiamos en el Tema 1 una clase especial de este tipo de anillos, los anillos locales. Comenzamos el Tema 7 estudiando más en profundidad estos últimos: caracterizamos los anillos locales en distintas formas y posteriormente, y siguiendo con la idea de que el alumno no debe trabajar en vacío, damos distintos ejemplos de tales anillos. Estudiamos entonces los anillos semilocales obteniendo resultados bastantes interesantes en sí. Cabe destacar que todo anillo semilocal es Dedekind-finito, más aún, posee rango estable 1. La clase de los anillos semilocales es demasiado complicada para obtener un teorema de estructura, no obstante, introduciendo una hipótesis adicional, con lo que trabajamos con una clase algo más pequeña (la de los anillos semiperfectos) conseguimos una teoría de estructura bastante espectacular: demostramos que todo anillo semiperfecto de cociente simple es isomorfo a un anillo de matrices sobre un anillo local, en donde el índice de tales matrices, como el anillo local (salvo isomorfismos) son un invariante, y que un anillo semiperfecto es, en general, isomorfo a una suma directa de los anillos anteriores junto con un residuo contenido en el radical de Jacobson del anillo. Es interesante ver como los anillos locales juegan en está teoría un papel similar al de los anillos de división el la teoría clásica de anillos semisimples. Cabe destacar que todo anillo artiniano es semiperfecto, por lo que obtenemos un teorema de estructura para la clase de los anillos artinianos.

Comenzamos en el Tema 8 la teoría clásica de cocientes, con lo que obtendremos, entre otras cosas, las herramientas necesarias para el estudio de los anillos noetherianos.

Uno de los primeros resultados que un alumno de álgebra aprende es cómo sumergir un dominio de integridad (conmutativo) en su cuerpo de fracciones. Más tarde, en teoría de álgebra conmutativa, aparecen los procesos de localización en donde dado un anillo conmutativo R y un subconjunto multiplicativamente cerrado S de R existen un anillo R_S y un homomorfismo de anillos $\phi : R \to R_S$ tales que:

(1) $\phi(S) \subset Inv(R_S)$,
(2) para cada $q \in R_S$ existe $a \in R$, $s \in S$ tales que $q = \phi(s)^{-1}\phi(a)$ y
(3) $Ker(\phi) = \{r \in R | sr = 0 \text{ para algún } s \in S\}$.

El anillo R_S es único salvo isomorfismos y se denomina la localización de R en S.

Es claro que el caso clásico de envolver un dominio de integridad en su cuerpo de fracciones corresponde a la localización del dominio D en $D \setminus \{0\}$.

En caso de que nuestro anillo no sea conmutativo podemos encontrar fenómenos extraños. Así, nos encontramos con anillos íntegros que no pueden ser sumergidos en anillos de división. El primer ejemplo, dado por Malcev en 1937, consiste en tomar el álgebra semigrupo $\mathbb{Q}H$ en donde H es un monoide cancelativo que no es submonoide de ningún grupo. También nos encontramos con el caso contrario: J.L. Fisher proporcionó un ejemplo de anillo íntegro con infinitas envolturas no isomorfas.

Una condición necesaria y suficiente para que exista la localización de un anillo R respecto de un subconjunto multiplicativamente cerrado S formado por elementos regulares fue dada por Ore en la década de los 30 del siglo XX, la llamada condición de Ore por la izquierda. Aproximadamente 20 años más tarde A. Goldie (y en parte L. Lesieur y R. Croisot) caracterizaría los anillos que son órdenes clásicos por la izquierda en anillos semisimples (unitarios) como aquéllos que son semiprimos, verifican la condición de cadena ascendente para ideales anuladores por la izquierda y tienen dimensión uniforme por la izquierda finita (actualmente semiprimos de Goldie por la izquierda). Como consecuencia importante de este hecho se obtiene la primera herramienta para el estudio de los anillos noetherianos por la izquierda, ya que éstos son de Goldie por la izquierda.

Siguiendo en esta línea se ha conseguido caracterizar distintas clases de anillos. Así, Robson y Small caracterizan los órdenes por la izquierda en anillos artinianos por la izquierda, Johnson caracteriza los anillos no singulares por la izquierda como aquellos tales que su anillo de cocientes por la izquierda maximal es regular von Neumann y Gabriel caracteriza los anillos tales que su anillo de cocientes por la izquierda maximal es semisimple como los no singulares por la izquierda con dimensión uniforme por la izquierda finita.

En 1990, J. fountain y V. Gould, siguiendo ideas procedentes de la teoría de semigrupos, dan una noción de orden (local) en anillos no necesariamente unitarios y caracterizan los anillos que son órdenes Fountain y Gould en anillos semiprimos que coinciden con su zócalo. Más tarde, en 1991, Ahn y Márki extienden dichos resultados para órdenes por un la izquierda, así como caracterizan los órdenes Fountain y Gould por la izquierda en anillos primitivos por la izquierda.

Estudiamos en el tema 9 los P.I. anillos, o anillos que verifican una identidad polinómica mónica. Éstos son una generalización de los anillos conmutativos así como de las álgebras de dimensión finita, o de cualquier subálgebra de éstas. Demostramos que al igual que estos los P.I. anillos verifican la conjetura de Köthe. Gracias a este hecho demostramos que todo P.I. anillo semiprimo es subanillo de un anillo de matrices sobre un anillo conmutativo, lo que demuestra que todo P.I. anillo semiprimo verifica una identidad polinómica estándar, así como que todo P.I. anillo primo se puede sumergir en un anillo de matrices sobre un cuerpo. Este último hecho demuestra un resultado que ha sido comentado anteriormente, a saber, que todo anillo de división de dimensión finita sobre su centro (es decir, todo P.I–anillo de división) es subanillo de un anillo de matrices sobre un cuerpo.

Aunque pueda sorprender en un principio, el hecho de que un anillo verifique una identidad polinómica restringe, en cierta medida, la capacidad del anillo para ser grande. Prueba de este hecho es el Teorema de Kaplansky, que afirma que un P.I. anillo primitivo es un anillo de matrices sobre un anillo de división de dimensión finita sobre su centro. Otra prueba es el Teorema de Posner que asevera que un P.I. anillo primo es un orden central en uno de los anteriores.

No se puede terminar un curso de teoría de anillos asociativos sin haber hecho mención a la noción de categoría. El concepto de categoría fue introducido por Eilenberg y MacLane en 1945 y permite estudiar de forma simultánea una gran variedad de estructuras matemáticas.

Como los alumnos han cursado la asignatura álgebra homológica, impartida en el segundo cuatrimestre del tercer curso de la licenciatura, ya han trabajado con categorías, y por tanto simplemente recordaremos los conceptos que vamos a necesitar.

Nos vamos a centrar en desarrollar la llamada Teoría de Morita. La idea fundamental de esta teoría consiste en asociar a un anillo R su categoría de módulos por la izquierda (resp. por la derecha) y relacionar propiedades del anillo con propiedades de dicha categoría. Así, ya hemos demostrado que un anillo unitario R es semisimple si y sólo si:

(1) Todo R-modulo por la izquierda es inyectivo.

(2) Todo R-modulo por la izquierda es proyectivo.
(3) El retículo de cualquier R-módulo es complementado.

tenemos también que un anillo R es:

— Noetheriano por la izquierda si y sólo si toda suma directa finita de R-módulos inyectivos es inyectivo.
— Artiniano por la izquierda si y sólo si todo R-módulo inyectivo es suma directa de envolturas inyectivas de R-módulos simples.
— regular von Neumann si y sólo si todo R-módulo es plano.

Es lícito por tanto el pensar que dos anillos cuyas categorías de módulos son equivalentes están íntimamente relacionados.

Introducimos la noción de contexto de Morita y establecemos los Teoremas de Morita I, II y III que, entre otras cosas, contestan las siguientes preguntas: ¿ cuándo las categorías R-mod y S-mod son equivalentes? y ¿ cómo son los funtores asociados a dichas equivalencias? Como consecuencia de estos resultados obtenemos una nueva demostración del Teorema de Wedderburn-Artin.

Mostramos la estrecha relación existente entre dos anillos R y S Morita equivalentes, a saber, existen un natural n y un idempotente pleno $e \in \mathcal{M}_n(R)$ tales que $S \cong e\mathcal{M}_n(R)e$. Como consecuencia demostramos que un anillo R es primo (semiprimo) y artiniano si y sólo si es Morita equivalente a un anillo de división (una suma directa finita de anillos de división).

TEMA 1.
MODULOS.

Módulos, submódulos, homomorfismos de módulos. Teoremas de isomorfía.

El objeto de este tema es estudiar el material básico de la teoría de módulos. Se introduce la noción de módulo por la izquierda (resp. por la derecha) a partir de la acción de un anillo R sobre un grupo abeliano M. Seguidamente se demuestra que dicha noción es equivalente a tener una representación del anillo R en el anillo de endomorfismos de un grupo abeliano M.

Como primeros ejemplos destacamos que los módulos sobre cuerpos son precisamente los espacios vectoriales, que los grupos abelianos son precisamente los $\mathbb{Z}$-módulos y que todo anillo unitario R posee, de forma natural, estructura de R-módulo, tanto por la izquierda como por la derecha.

Buscando nuevos ejemplos de módulos se introduce la noción de:

– submódulo y se estudia el retículo de los submódulos de un módulo dado; se comprueba que dicho retículo es modular y completo,

– homomorfismo de módulo y se resaltan los submódulos asociados a un homomorfismo. Escribiremos, como regla general, los homomorfismos de módulos por el lado opuesto al de los "escalares". Así, los homomorfismos de módulos por la izquierda (resp. derecha) los haremos actuar por la derecha (resp. izquierda) y la composición de morfismos se hará de izquierda a derecha (resp. de derecha a izquierda). Esto permitirá dar una formulación del Teorema de Wedderburn-Artin sin mencionar el anillo opuesto, así como dotar, de forma natural, a todo R-módulo M de estructura de R-S-bimódulo, para $S := End_R(M)$.

– producto directo y de coproducto o suma directa externa de una familia arbitraria de módulos y se caracterizan en términos de sus propiedades universales. Se observa que los conceptos de suma directa interna y suma directa externa son equivalentes. Por último se demuestra que un R-módulo M es isomorfo a un coproducto finito de módulos $\{M_i\}_{i=1}^n$ si y sólo si existen n idempotentes ortogonales en

$End_R(M)$, digamos $e_1, \ldots, e_n$, tales que $\sum e_i = 1d$ e $Im(e_i) = M_i$.

– módulo cociente y se caracteriza también por su propiedad universal. Se demuestra que dado un submódulo N de un módulo M existe un isomorfismo de retículos entre los submódulos de M que contienen a N y los submódulos de M/N.

En este punto establecemos los Teoremas de isomorfía de E. Noether así como el Lema de Zassenhaus, también conocido como lema de la mariposa.

Para concluir, introducimos el concepto de bimódulo y demostramos que si M es un R-módulo por la izquierda, M posee estructura de (R,S)-bimódulo con $S = End_R(M)$.

Sucesiones exactas, sucesiones exactas cortas.

Comenzamos estudiando las sucesiones exactas de módulos (que tiene su origen en Topología Algebraica) así como las sucesiones exactas cortas. Se define sucesión exacta corta escindida como aquella sucesión exacta corta, digamos

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0,$$

en la que $Im(f) = Ker(g)$ es sumando directo de M, y se caracteriza en términos de la inversibilidad lateral tanto de f como de g.

Módulos libres.

Se define R-módulo libre sobre un conjunto no vacío S a partir de su propiedad universal. Se demuestra la existencia y unicidad, salvo isomorfismo, de dicho objeto. Se obtiene como consecuencia que un R-módulo M es libre (sobre S) si y sólo si es isomorfo a un coproducto de copias de R ($M \cong \oplus_S R$).

Se introduce la noción de base de un módulo. Se dan ejemplos de módulos que tienen base y módulos que no la tienen. Por último se caracterizan los módulos libres como aquellos que poseen base. En cuanto al cardinal de las bases de un mismo R-módulo M, se prueba que si M posee una base infinita, todas las bases son infinitas y de igual cardinal, pero que si posee una de cardinal finito "el caos puede reinar". Así, damos un ejemplo de un R-módulo libre que posee, al menos, una base de cardinal n para cada natural n. Definimos la noción de anillo con IBN y demostramos que los anillos de división, los anillos finitos y los anillos conmutativos y unitarios tienen IBN.

Por último se demuestra que todo módulo es imagen epimórfica de un módulo libre.

Módulos proyectivos.

Se introduce el concepto de módulo proyectivo. Se observa que todo módulo libre es proyectivo y se dan distintas caracterizaciones de módulos proyectivos: para un módulo P las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) P es proyectivo.
(2) Toda sucesión exacta corta de la forma $0 \to N \to M \to P \to 0$ es escindida.
(3) P es sumando directo de un módulo libre.
(4) El funtor $Hom_R(P, -)$ es exacto (siempre es exacto a izquierda).

Es más, en las condiciones anteriores, si P está finitamente generado, P es sumando directo de un módulo libre con base finita.

Para un R-módulo por la izquierda M se define su dual, que denotaremos por M^* (M^* posee, de forma natural, estructura de R-módulo por la derecha). Se recuerda el dual de un espacio vectorial y se ponen ejemplos de módulos tales que sus duales son nulos.

Se demuestra entonces el Lema de la base dual: para un módulo P las siguientes condiciones son equivalentes

(1) P es proyectivo

(5) existen $\{a_i : i \in I\} \subset P$ y $\{f_i : i \in I\} \subset P^*$ tales que para todo $a \in P$, $(a)f_i = 0$ para casi todo i y $a = \sum(a)f_i a_i$.

En este caso $\{a_i : i \in I\}$ es un conjunto de generadores para P, es más, si P está finitamente generado se puede conseguir que estas familias sean finitas.

Por último, se demuestra que para todo R-módulo proyectivo P, la aplicación $\Phi : P \to P^{**}$ definida por $\Phi_a(f) = (a)f$ (el homomorfismo canónico de P en su bidual) es un monomorfismo de R-módulos por la izquierda. Es más, si P está finitamente generado, Φ es un isomorfismo.

Módulos inyectivos.

Un concepto dual al de módulo proyectivo es el de módulo inyectivo. Comenzamos la lección definiendo módulo inyectivo. Como primer ejemplo se ve que los espacios vectoriales sobre anillos de división son inyectivos y que un producto de anillos es inyectivo si y sólo si cada uno de ellos lo es.

Damos la primera caracterización de módulo inyectivo: para un R-módulo I las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) I es inyectivo.

(2) El funtor $Hom_R(-, I)$ es exacto (siempre es exacto a izquierda).

(3) Toda sucesión exacta corta $0 \to I \to M \to N \to 0$ es escindida.

(4) Si I es submódulo de M, entonces I es sumando directo de M.

Demostramos el criterio de Baer para módulos inyectivos, esto es: un módulo I es inyectivo si y sólo si:

(5) para cualquier ideal por la izquierda U de R y cualquier homomorfismo de R-módulos $f : U \to I$ existe un homomorfismo de R-módulos $f' : R \to I$ tal que $f'|_U = f$.

Como propiedad dual a que todo módulo sea cociente de un módulo proyectivo, se tiene que todo módulo es submódulo de un módulo inyectivo. Dedicaremos el resto de la lección a probar este resultado.

Introducimos la noción de divisibilidad para módulos. Seguimos en este punto la definición dada por T.Y. Lam que resulta ser un poco más restrictiva que la usual: diremos que un R-módulo M es divisible si para cada par de elementos $r \in R$ y $m \in M$ tales que $lan_R(r) \subset lan_R(m)$ se tiene que $m \in rM$.

Demostramos entonces que un R-módulo M es divisible si y sólo si para todo $a \in R$ y todo homomorfismo de R-módulos $f : Ra \to M$ existe un homomorfismo

$\bar{f} : R \to M$ que extiende a f (esta segunda condición es llamada por algunos autores inyectividad para ideales izquierda principales). Tenemos entonces que todo módulo inyectivo es divisible y, aplicando el criterio de Baer, que un módulo sobre un anillo de ideales por la izquierda principales es inyectivo si y sólo si es divisible.

Demostramos entonces que todo $\mathbb{Z}$-módulo se puede sumergir en un $\mathbb{Z}$-módulo divisible (y por tanto inyectivo). Para el caso general, como todo R-módulo M es en particular un $\mathbb{Z}$-módulo, por el resultado anterior, podemos envolverlo en un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, digamos $\bar{M}$, y comprobamos que $\overline{M} := Hom(R_{\mathbb{Z}}, \bar{M}_{\mathbb{Z}})$ es un R-módulo inyectivo que contiene a M.

Nos centramos ahora en estudiar dos envolventes de un módulo M: la envolvente inyectiva y la envolvente racional. Demostramos que las siguientes condiciones son equivalentes para cada submódulo M de un módulo I:

(i) I es una extensión esencial maximal de M.
(ii) I es inyectivo y esencial sobre M.
(iii) I es una envolvente inyectiva minimal de M.

A un módulo I que verifique las condiciones anteriores se le denomina envolvente inyectiva de M. Por último, se demuestra que todo R-módulo M posee envolvente inyectiva y que ésta es única salvo M-isomorfismo (es decir, si I e I' son dos envolventes inyectivas de M, existe un epimorfismo de módulos $f : I \to I'$ tal que $(m)f = m$ para todo $m \in M$). La envolvente inyectiva de un R-módulo M se denotará por $E(M)$.

Con este resultado obtenemos otra caracterización de módulo inyectivo: un R-módulo I es inyectivo si y sólo si

(6) I no posee extensiones esenciales propias.

Se observa que todo endomorfismo de un módulo M puede extenderse a un endomorfismo de $E(M)$, aunque no siempre de forma única.

Introducimos la noción de submódulo denso. Demostramos que para cualquier submódulo N de un módulo M las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) N es un submódulo denso de M.
(ii) $Hom_R(M/N, E(M)) = 0$.
(iii) Para cualquier submódulo P tal que $N \subset P \subset M$, $Hom_R(P/N, E(M)) = 0$.

Introducimos la envolvente racional de un R-módulo M (como submódulo de $E(M)$), que denotaremos por $\hat{E}(M)$, y damos una caracterización de ésta por elementos. Demostramos que $\hat{E}(M)$ es una extensión densa maximal de M y probamos, entre otras cosas, que los endomorfismos de M se "elevan" de forma única a endomorfismos de $\hat{E}(M)$. Esta nueva envolvente será de utilidad para el estudio del anillo de cocientes por la izquierda maximal de ciertos anillos.

Módulos artinianos y noetherianos. Teorema de Jördan-Holder.

Un R-módulo se dice noetheriano (resp. artiniano) si verifica la condición de cadena ascendente (resp. descendente) para sus submódulos. Equivalentemente si cada familia no vacía de submódulos posee un elemento maximal (resp. minimal).

Caracterizamos los R-módulos noetherianos como aquéllos tales que todos sus submódulos están finitamente generados.

Demostramos que cualquier submódulo y cualquier imagen homomórfica de un módulo noetheriano (resp. artiniano) es noetheriano (resp. artiniano). Es más, si N es un submódulo de un módulo M, M es noetheriano (resp. artiniano) si y sólo si N y M/N son noetherianos (resp. artinianos). Como consecuencia se obtiene que la suma directa finita de módulos noetherianos (resp. artinianos) es noetheriana (resp. artiniana).

Se dice que un anillo R es noetheriano por la izquierda si es noetheriano como R-módulo por la izquierda, esto es, cuando verifica la condición de cadena ascendente para sus ideales por la izquierda. Los conceptos noetheriano por la derecha, artiniano por la izquierda y artiniano por la derecha se definen de manera análoga.

Cabe preguntarse si estas cuatro nociones son independientes. Introducimos los anillos triangulares que nos van a proporcionar los ejemplos que contestan dicha cuestión: consideremos R y S dos anillos y M un R-S-bimódulo. Entonces $T = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ con la sumas y el producto propios de los anillos de matrices tiene estructura de anillo. Además: el anillo T es noetheriano por la izquierda (resp. por la derecha) si y sólo si R y S son noetheriano por la izquierda (resp. por la derecha) y M es un R-módulo por la izquierda noetheriano (resp. M es un S-módulo por la derecha noetheriano. Este mismo enunciado es cierto si sustituimos artiniano por noetheriano.

Así, el anillo

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

es noetheriano por la izquierda y no es noetheriano por la derecha ni artiniano por la izquierda ni por la derecha. Igualmente el anillo

$$\begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

es noetheriano y artiniano por la izquierda pero no es artiniano ni noetheriano por la derecha.

Sí se verifica, es el llamado Teorema de Hopkins-Levitzki, que un anillos con unidad artiniano por la izquierda (resp. por la derecha) es noetheriano por la izquierda (resp. por la derecha). Este resultado era aparentemente desconocido por Noether y Artin en sus primeros trabajos sobre anillos con condiciones de cadena. Nosotros lo demostraremos una vez que hayamos estudiado el radical de Jacobson de un anillo. El siguiente ejemplo muestra que existen módulos artinianos que no son noetherianos: el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{P}/\mathbb{Z}$, donde

$$\mathbb{P} = \left\{ \frac{m}{p^k} \quad | \quad m \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

es artiniano pero no noetheriano.

Siguiendo con el estudio de los módulos que verifican condiciones de cadena demostramos que todo módulo por la izquierda finitamente generado sobre un anillo noetheriano por la izquierda (resp. artiniano por la izquierda) es noetheriano por la izquierda (resp. artiniano por la izquierda).

Estudiamos las series de submódulos de un módulo. Demostramos, a partir del Lema de Zassenhaus, el Teorema del refinamiento de Schreier: dos series de un módulo dado admiten refinamientos isomorfos. Así como el Teorema de Jordan-Holder: dos series de composición para un mismo módulo son isomorfas.

Definimos la longitud de un módulo M y establecemos la equivalencia entre los módulos de longitud finita y los que son a la vez artinianos y noetherianos.

Módulos indescomponibles. Lema de Fitting. Teorema de Krull-Schmidt.

Comenzamos introduciendo la noción de módulo indescomponible: un módulo M se dice descomponible cuando se puede expresar como suma directa de dos submódulos propios; en caso contrario se dice que es indescomponible. Caracterizamos los módulos indescomponibles como aquéllos tales que su anillo de endomorfismos ($End_R(M)$) no posee más idempotentes que los triviales.

No todo módulo puede escribirse como suma directa finita de submódulos indescomponibles. Incluso en el caso de poder descomponer el módulo como suma directa finita de módulos indescomponibles, esta descomposición no tiene porque ser "esencialmente" única. Damos aquí una condición para que esto sí suceda.

Se define un anillo local como aquél en el que el conjunto de los elementos no inversibles es un ideal. Se define módulo fuertemente indescomponible como aquél cuyo anillo de endomorfismos es local. Se observa que los anillo locales no contienen más idempotentes que los triviales, por lo que un R-módulo fuertemente indescomponible es indescomponible.

Probamos entonces un teorema sobre unicidad en la descomposición de un módulo como suma directa de submódulos indescomponibles:

Sean $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots M_r$ y $N = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots N_s$ dos R-módulos, donde los M_i son submódulos fuertemente indescomponibles y los N_i son indescomponibles. Entonces, si M es isomorfo a N, se tiene que $r = s$ y existe una permutación $\sigma \in S_r$ tal que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ para $i = 1, 2, \ldots, r$.

Diremos que un módulo M es un $\mathcal{F}$-módulo o módulo de Fitting si dado $f \in End_R(M)$ existen dos submódulos M_1 y M_2 de M, f-invariantes ($M_i f \subset M_i$ para $i = 1, 2$) tales que $f|_{M_1}$ es biyectivo y $f|_{M_2}$ es nilpotente. El Lema de Fitting establece que todo módulo de longitud finita es un $\mathcal{F}$- módulo. Con este resultado se obtiene que los módulos indescomponibles de longitud finita son fuertemente indescomponibles.

Por último demostramos que un modulo M de longitud finita se puede descomponer como suma finita de módulos indescomponibles, lo que lleva al llamado Teorema de Krull-Schmidt:

Sea M un módulo artiniano y noetheriano y supongamos que $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_r = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_s$, en donde los M_i y los N_j son indescomponibles. Entonces $r = s$ y existe una permutación $\sigma \in S_r$ tal que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ para $i = 1, 2, \ldots, r$.

Módulos simples. Lema de Schur.

Comenzamos introduciendo la noción de R-módulo sobre un anillo R no necesariamente unitario, ya que será de utilidad en el estudio de los anillos primitivos por la izquierda (resp. por la derecha). Introducimos la noción de R-módulo simple y demostramos que un R-módulo M es simple si y sólo si verifica alguna de (y por tanto todas) las condiciones siguientes:

(1) $M \neq 0$ y para todo $0 \neq m \in M$, $Rm = M$.
(2) $M \cong R/I$ en donde I es un ideal por la izquierda maximal de R con $R^2 \nsubseteq I$.

Demostramos que si M y N son dos R-módulos, con M simple, cualquier homomorfismo no nulo de R-módulos $f : M \to N$ es inyectivo y cualquier homomorfismo no nulo de R-módulos $f : N \to M$ es sobreyectivo, razonamiento que prueba el Lema de Schur:

Cualquier homomorfismo no nulo entre módulos simples es isomorfismo. Por tanto, si M es un R-módulo simple, $End_R(M)$ es un anillo de división.

Por último hacemos notar que el recíproco de este lema no es cierto.

Módulos semisimples. El zócalo de un módulo.

Definimos módulo semisimple como aquél que es suma de submódulos simples y demostramos que un módulo es semisimple si y sólo si es suma directa de submódulos simples. Como consecuencia de este hecho se obtiene que todo espacio vectorial posee base.

Caracterizamos los módulos semisimples como aquéllos tales que el retículo de sus submódulos es complementado. Como consecuencia obtenemos que un módulo M es semisimple si y sólo si no contiene submódulos propios esenciales y que cualquier submódulo y cualquier imagen homomórfica de un módulo semisimple es semisimple.

Observamos que también podemos caracterizar los módulos semisimples en términos de sucesiones exactas cortas, ya que un modulo M es semisimple si y sólo si toda sucesión exacta corta de la forma $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ es escindida.

Definimos la noción de zócalo de un módulo, y lo denotamos por $Zoc(M)$. Es claro que un módulo es semisimple si y sólo si coincide con su zócalo. Se demuestra, descripción dada por Kasch y Sandomierski, que el zócalo de un módulo coincide con la intersección de todos sus submódulos esenciales.

Definimos la componente homogénea de un módulo M respecto de un submódulo simple N, que denotamos por I_N, y demostramos que el zócalo de un módulo es suma directa de sus componentes homogéneas. Comprobamos que si M y M' son dos R-módulos y $f : M \to M'$ es un homomorfismo de R-módulos, $I_N f \subset I_{Nf}$, por lo que el zócalo de un módulo es un submódulo invariante por endomorfismos. Este hecho va a permitir probar, introduciendo algunas nociones de relaciones de dependencia abstractas, que dado cualquier módulo M, si $M = \oplus_{i \in I} M_i = \oplus_{j \in J} N_j$ con M_i, N_j submódulos simples de M, entonces existe una biyección entre los conjuntos $\{M_i\}$ y $\{N_j\}$ tales que los correspondiente módulos son isomorfos. Como consecuencia se obtiene que todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo cardinal.

Bibliografía Tema 1

A.J. Berrick. M.E. Keating, *An Introduction to Rings and Modules with K.Theory in View*, Cambridge University Press, 2000.

T. S. Blyth, *Modules Theory. An approach to linear algebra*, American Mathematical Society, 1968.

E-A. Behrens, *Ring Theory*, Academic Press, New York, N.Y, 1972.

P.M. Cohn, *And Introduction to Ring Theory*, Springer-Verlag. New York, 2000.

J.C. McConnell. J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, John Wiley& Sons, 1987.

K.R. Goodearl, *Ring Theory. Nonsingular Rings and Modules*, Pure and Applied Matrhematics, 1976.

T.W.Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag. New York, 1974.

Nathan Jacobson, *Structure of Rings*, American Mathematical Society, Vol XXXVII, 1968.

Nathan Jacobson, *Basic Algebra II*, W.H. Freeman and Company, New York, 1989.

T.Y. Lam, *Lectures on modules and rings*, Graduate texts in Mathematics, Springer, 1999.

J. Lambek, *Lectures on rings and modules*, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y, 1976.

Bo Stenström, *Rings of quotients. An Introduction to Methods of Ring Theory*, Springer-Verlag, 1975.

P. Ribenboim, *Rings and modules*, Interscience Publishers, New York, N.Y, 1969.

L.H. Rowen, *Ring Theory I*, Accademic Press, Inc. New York, N.Y, 1988.

R. Wisbauer, *Free modules and Algebras: Bimodules Structure and Group Actions*, Longman, 1996.

TEMA 2.
TEORÍA DE WEDDERBURN-ARTIN.

Lección 10.- Anillos semisimples.

Lección 11.- Estructura de los anillos semisimples. Teorema de Wedderburn-Artin.

Comenzamos introduciendo la noción de anillo semisimple, damos aquí una definición diferente de la dada originalmente por Wedderburn (y Artin) de álgebra semisimple. Wedderburn estaba interesado principalmente en álgebras de dimensión finita sobre cuerpos. En estas álgebras define el radical como el mayor ideal nilpotente y si éste es cero llama al álgebra semisimple (veinte años más tarde Artin demuestra que los anillos que verificaban ambas condiciones de cadena también poseen un mayor ideal nilpotente, por lo que mantiene la definición dada por Wedderburn de álgebra semisimple). Nosotros definimos aquí anillo semisimple por la izquierda como aquél que es semisimple como módulo por la izquierda sobre sí mismo, lo que permitirá llegar de forma fácil y rápida a la clasificación de este tipo de anillos.

Anillos semisimples.

Se comienza definiendo anillo semisimple: un anillo R se dice semisimple (por la izquierda) si es semisimple visto como R-módulo por la izquierda. Damos varias caracterizaciones de los anillos semisimples. Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) R es un anillo semisimple por la izquierda.
(2) Toda sucesión exacta corta de R-módulos por la izquierda es escindida.
(3) Todo R-módulo por la izquierda, es semisimple.
(4) Todo R-módulo por la izquierda finitamente generado es semisimple.
(5) Todo R-módulo por la izquierda cíclico es semisimple.

Demostramos entonces que los anillos semisimples y unitarios, considerados como módulos por la izquierda sobre sí mismos, son de longitud finita, por lo que son tanto artinianos como noetherianos por la izquierda.

Por último damos varias caracterizaciones homológicas de los anillos semisimples y unitarios:

(6) Todo R-módulo es proyectivo.
(7) Todo R-módulo es inyectivo.

Estructura de los anillos semisimples. Teorema de Wedderburn-Artin.

Presentamos en esta lección el Teorema de Wedderburn-Artin, que en esencia determina la clase de los anillos semisimples y unitarios en función de otra clase más "simple" de anillos, la de los anillos de división.

Comenzamos demostrando que para todo anillo unitario S y todo natural n, la aplicación que a cada ideal I de S lo manda a $\mathcal{M}_n(I)$ es un isomorfismo de retículos entre los ideales de S y los de $R := \mathcal{M}_n(S)$. Nos centramos en el caso particular de que $S := \Delta$ sea un anillo de división obteniendo, por la propiedad anterior, que R es un anillo simple, es más, R es semisimple por la izquierda y por la derecha y por tanto artiniano y noetheriano por ambos lados. Demostramos por último que R posee, salvo isomorfismos, un único R-módulo por la izquierda simple y fiel, llamémoslo V (como representante podemos tomar cualquier ideal por la izquierda minimal de R) es más, R considerado como R-módulo por la izquierda, es isomorfo a V^n y $End_R(V) \cong \Delta$.

Volviendo al estudio de los anillos semisimples comprobamos que la suma directa finita de anillos semisimples es semisimple, por lo que si $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ son anillos de división y $n_1, n_2 \ldots, n_k \in \mathbb{N}$,

$$R = \mathcal{M}_{n_1}(\Delta_1) \oplus \mathcal{M}_{n_2}(\Delta_2) \cdots \oplus \mathcal{M}_{n_k}(\Delta_k)$$

es un anillo semisimple.

Obtenemos entonces el Teorema de Wedderburn-Artin: para un anillo unitario R las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) R es semisimple.
(2) $R \cong \mathcal{M}_{n_1}(\Delta_1) \oplus \mathcal{M}_{n_2}(\Delta_2) \cdots \oplus \mathcal{M}_{n_k}(\Delta_k)$, en donde $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ son anillos de división y $n_1, n_2 \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

Además, tanto k como los pares (n_i, Δ_i) son únicos salvo isomorfismos y permutaciones.

Como corolario obtenemos que un anillo unitario es semisimple por la izquierda si y sólo si lo es por la derecha.

Obtenemos un teorema que determina completamente los módulos sobre este tipo de anillos: sea R un anillo semisimple y unitario. Entonces existe una biyección entre las clases de isomorfismos de R-módulos simples y las componentes simples del anillo. Es más, si $R = R_1 \oplus R_2 \cdots \oplus R_n$ es la descomposición de R en componentes simples e I_i es un ideal por la izquierda minimal de R_i, entonces $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ es un conjunto de representantes de R-módulos simples mutuamente no isomorfos.

Por último caracterizamos los anillos simples que son a la vez semisimples: para un anillo simple y unitario R las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) R es semisimple.
(2) $R \cong \mathcal{M}_n(\Delta)$, con $n \in \mathbb{N}$ y Δ un anillo de división.

Ya hemos demostrado que para este anillo existe, salvo isomorfismos, un único R-módulo simple. El siguiente teorema, debido a Jacobson, estudia más en profundidad este hecho: sea M_i un espacio vectorial de dimensión finita sobre un anillo de división Δ_i, para $i = 1, 2$. Supongamos que existe un isomorfismo de anillos $g : End_{\Delta_1} M_1 \to End_{\Delta_2} M_2$. Entonces existe un isomorfismo semilineal $s : M_1 \to M_2$ tal que para todo $a \in End_{\Delta_1} M_1$ se tiene que $g(a) = sas^{-1}$.

En temas posteriores iremos dando nuevas versiones de este teorema. Así, una vez visto la clasificación de los anillos primitivos por la izquierda (Teorema de Densidad de Jacobson) podremos volver a demostrar el Teorema de Wedderburn-Artin al que añadiremos nuevas equivalencias:

(3) R es primitivo y artiniano por la izquierda.
(4) R es primo y artiniano por la izquierda.
(5) R es simple y artiniano por la izquierda.
(6) R es simple, unitario y posee un ideal por la izquierda minimal.

Cuando estudiemos los anillos semiprimos que coinciden con su zócalo obtendremos una nueva caracterización de estos anillos:

(7) R es primo, unitario y coincide con su zócalo.

Por último, una vez construida toda la maquinaria que envuelve la Teoría de Morita, daremos una demostración alternativa del Teorema de Wedderburn-Artin que permitirá dar una última caracterización de los anillos semisimples y unitarios:

(8) R es unitario y Morita equivalente a un anillo de división.

Referencias

A.J. Berrick. M.E. Keating, *An Introduction to Rings and Modules with K.Theory in View*, Cambridge University Press, 2000.

E-A. Behrens, *Ring Theory*, Academic Press, New York, N.Y, 1972.

P.M. Cohn, *Algebra (II)*, John Wiley& Sons, 1977.

P.M. Cohn, *And Introduction to Ring Theory*, Springer-Verlag. New York, 2000.

J.C. McConnell. J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, John Wiley& Sons, 1987.

T.W.Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag. New York, 1974.

N. Jacobson, *Basic Algebra II*, W.H. Freeman and Company, New York, 1989.

T.Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Graduate texts in Mathematics, Springer, 1991.

L.H. Rowen, *Ring Theory I*, Accademic Press, Inc., New York, N.Y, 1988.

TEMA 3.
ANILLOS PRIMITIVOS Y SEMIPRIMITIVOS.

Anillos primitivos.

Introducimos la noción de anillo primitivo por la izquierda, en un anillo no necesariamente unitario R, como aquél que posee un R-módulo por la izquierda simple, también llamado por algunos autores irreducible, y fiel.

Caracterizamos internamente estos anillos como los que contienen un ideal por la izquierda modular maximal de core cero. Como consecuencia obtenemos que:

(1) un anillo simple con un ideal por la izquierda propio y modular es primitivo. En particular, como todo ideal por la izquierda de un anillo unitario es modular, los anillos simples y unitarios son primitivos,

(2) los anillos conmutativos y primitivos son precisamente los cuerpos.

Observamos que la noción de anillo primitivo no es simétrica. Es decir, que existen anillos primitivos por la izquierda que no lo son por la derecha y viceversa. El primero de tales ejemplos fue dado por Bergman en 1965.

Teorema de Densidad de Jacobson.

Sea R un anillo primitivo por la izquierda y denotemos por M a un R-módulo por la izquierda simple y fiel. Por ser M simple, aplicando el Lema de Schur, $\Delta := End({}_RM)$ es un anillo de división. Así, M posee estructura de Δ-espacio vectorial por la derecha. Por ser M fiel, la aplicación $\phi : R \to End(M_\Delta)$ definida por $\phi(r) = \lambda_r$, en donde λ_r denota al operador de multiplicación por la izquierda, es un monomorfismos de anillos, por lo que R es isomorfo a un subanillo del anillo de endomorfismos de este espacio vectorial. Establecemos entonces el Teorema de Densidad de Jacobson que caracteriza los anillos primitivos como aquéllos que son isomorfos a subanillos densos de trasformaciones lineales de espacios vectoriales sobre anillos de división.

Encontramos entonces un resultado que será de utilidad en el estudio de los P.I. anillos primitivos. A saber, un anillo primitivo R o es isomorfo a un anillo de endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita sobre un anillo de división (esto sucede si M tiene dimensión finita sobre Δ) o para cada entero positivo n, R contiene un subanillo R_n que se aplica mediante un epimorfismo en $\mathcal{M}_n(\Delta)$.

Es interesante tener una descripción interna del anillo de división que aparece en el Teorema de Densidad de Jacobson. Si R es un anillo y M es un R-módulo simple y fiel, sabemos que existe un ideal por la izquierda modular maximal de core cero, digamos I tal que $M \cong R/I$. Es más, $End_R(R/I) \cong B/I$ en donde $B = \{b \in R \mid Ib \subset I\}$.

Si nos preguntamos sobre la unicidad de cada uno de los objetos que aparece en el Teorema de densidad de Jacobson encontramos que no la hay. Así, un anillo primitivo puede tener módulos irreducibles y fieles no isomorfos cuyos anillos de endomorfismos tampoco lo sean. Como veremos más adelante, tanto en el caso de anillos primitivos (o primos) y artinianos, como en el caso más general de anillos primos con un ideal por la izquierda minimal, si se tiene la unicidad, salvo isomorfismos, de estos objetos.

Veremos que la noción de densidad puede interpretarse como una noción topológica: dado un espacio vectorial V sobre un anillo de división Δ se puede dotar a $End(V_\Delta)$ de estructura de espacio topológico, llamada la topología Finita, tal que un subanillo R de $End(V_\Delta)$ es denso respecto de esta topología si y sólo si es denso en el sentido estudiado anteriormente. Es más, con respecto a esta topología, los anillos primitivos son anillos topológicos, esto es, tanto la suma como el producto son continuos.

Por último introducimos el concepto de ϕ-álgebra, con ϕ un anillo de escalares, y demostramos que una ϕ-álgebra es primitiva si y sólo si es isomorfa a un subanillo denso de trasformaciones lineales de un espacio vectorial sobre una ϕ-álgebra de división.

Anillos semiprimitivos.

Diremos que un anillo R es semiprimitivo (por la izquierda) si para cada elemento no nulo a de R existe un R-módulo por la izquierda simple M tal que $a \notin Ann_R(M)$ (esto es: $aM \neq 0$). Demostramos entonces que un anillo es semiprimitivo si y sólo si la intersección de todos los cores de todos los ideales por la izquierda modulares maximales es cero. Esto lleva a dos caracterizaciones de los anillos semiprimitivos interesantes por sí mismas. La primera afirma que un anillo R es semiprimitivo si y sólo si posee un módulo completamente reducible y fiel. La segunda caracteriza los anillos semiprimitivos en términos de anillos primitivos: un anillo es semiprimitivo si y sólo si es producto subdirecto de anillos primitivos.

Como corolario inmediato obtenemos que los anillos conmutativos y semiprimitivos son precisamente los productos subdirectos de cuerpos.

En el capítulo siguiente, cuando tratemos el radical de Jacobson de un anillo, comprobaremos que la noción de semiprimitividad sí es simétrica, por lo que dejaremos de decir semiprimitivo por la izquierda o por la derecha.

Anillos primos y semiprimos.

Se comienza la lección introduciendo la noción de ideal (resp. ideal por la izquierda e ideal por la derecha) nilpotente. Posteriormente se define el concepto de anillo semiprimo y se caracteriza como aquél en el que no existen ideales por la izquierda o por la derecha nilpotentes, así como aquél en el que no existen divisores absolutos de cero.

Se observa que todo anillo semiprimitivo es semiprimo y se deja como ejercicio demostrar que estos conceptos no son equivalentes.

Se introduce el concepto de anillo primo y, como en el caso anterior, se caracteriza en términos de ideales por la izquierda, ideales por la derecha y en términos de elementos. Se define ideal esencial y se prueba que un anillo semiprimo es primo si y sólo si todo ideal no nulo es esencial. Se deja como ejercicio ver si la propiedad de que todo ideal no nulo es esencial caracteriza, sin la condición extra de semiprimidad, a los anillos primos. Por último se observa que todo anillo primitivo es primo.

Se demuestra que los conceptos de primidad y semiprimidad son hereditarios, es decir, todo ideal de un anillo semiprimo (resp. primo) es semiprimo (resp. primo). Por último se definen los distintos anuladores de un subconjunto X en un anillo R, es decir, el anulador por la izquierda de X, representado por $lan_R(X)$, el anulador por la derecha de X, representado por $ran_R(X)$ y el anulador de X, representado por $ann_R(X)$, y se observa como se comportan estos conceptos frente a ideales: sea R un anillo semiprimo e I un ideal de R. Entonces

(1) $lan_R(I) = ran_R(I) = ann_R(I)$ es un ideal de R.
(2) $ann_R(I) = \{x \in R| \quad xRx = 0\}$.
(3) $I \oplus ann_R(I)$ es un ideal esencial de R.
(4) I es un ideal esencial de R si y sólo si $ann_R(I) = 0$.
(5) $R/ann_R(I)$ es un anillo semiprimo.

En (5) se observa que I puede verse como un ideal esencial de $R/ann_R(I)$ y que esta propiedad proporciona un camino para trasladar propiedades entre R y $R/ann_R(I)$.

Teorema de Wedderburn-Artin.

Recordamos la noción de anillo artiniano por la izquierda como aquél anillo R que verifica la condición de cadena descendente para ideales por la izquierda, es decir, R como R-módulo por la izquierda es artiniano.

Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) R es primitivo y artiniano por la izquierda.
(2) R es primo y artiniano por la izquierda.
(3) R es simple y artiniano por la izquierda.
(4) R es isomorfo a $\mathcal{M}_n(\Delta)$ para $n \in \mathbb{N}$ y Δ un anillo de división.

Además, en (4) se tiene que n y Δ son invariantes del anillo.

Estudiamos ahora el caso de los anillos semiprimitivos y artinianos, lo que proporciona nuevas equivalencias para el Teorema de Wedderburn-Artin: para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) R es semiprimitivo y artiniano.
(2) R es semiprimo y artiniano.
(3) R es semisimple y artiniano.
(4) $R \cong \mathcal{M}_{n_1}(\Delta_1) \oplus \mathcal{M}_{n_2}(\Delta_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_{n_k}(\Delta_k)$ en donde $n_1, n_2 \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ y $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_k$ son anillos de división.
(5) R es semisimple y unitario.

Además, en (4) se tiene que los n_i y los Δ_i están determinados salvo orden e isomorfismos. Como ya anunciamos anteriormente, en esta nueva versión del

Teorema de Wedderburn-Artin no se necesita, en principio, que el anillo sea unitario por lo que se demuestra que los anillos semiprimos y artinianos son unitarios.

Referencias

E-A. Behrens, *Ring Theory*, Academic Press, New York, N.Y, 1972.

P.M. Cohn, *Algebra (II)*, John Wiley& Sons, 1977.

J.C. McConnell. J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, John Wiley& Sons, 1987.

P, Cohn, *Universal algebras*, D. Reidel Pul. Co, 1981.

I.N. Herstein, *Noncommutative rings*, The carus Mathematical Monographs, 1968.

T.W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag. New York, 1974.

N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, Van Nostrand Reinhold Company, 1953.

N. Jacobson, *Basic Algebra II*, W.H. Freeman and Company, New York, 1989.

T.Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Graduate texts in Mathematics, Springer, 1991.

J. Lambek, *Lectures on rings and modules*, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y, 1976.

M. Petrich, *Rings and Semigroups*, Springer-Verlag, 1974.

L.H. Rowen, *Ring Theory I*, Accademic Press, Inc., New York, N.Y, 1988.

L.H. Rowen, *Ring Theory II*, Accademic Press, Inc., New York, N.Y, 1988.

TEMA 4.
TEORÍA DE RADICALES.

En teoría de anillos la noción de radical ha sido particularmente útil. Sí pensamos por ejemplo en las álgebras de dimensión finita, encontramos una variedad muy heterogénea de elementos. Así, un álgebra de este tipo puede ser desde un álgebra de división hasta un álgebra nilpotente. En 1908, Wedderburn demuestra que toda álgebra A de dimensión finita contiene un ideal nilpotente $\mathcal{R}(A)$ tal que $A/\mathcal{R}(A)$ es suma directa finita de anillos de matrices sobre anillos de división. Por tanto las álgebras de dimensión finita quedan razonablemente determinadas.

La teoría que envuelve la noción de radical persigue esta idea. Dada una clase de anillos $\mathcal{C}$, para cada anillo $R \in \mathcal{C}$ se determina un ideal $\mathcal{R}(R)$, llamado el radical de R, tal que podamos describir satisfactoriamente tanto los anillos radicales (los anillos $R \in \mathcal{C}$ tales que $\mathcal{R}(R) = R$) como los anillos cocientes $R/\mathcal{C}(R)$.

Algunas nociones sobre radicales.

Los fundamentos de la teoría axiomática del radical son dados de forma independiente por Kurosh y Amitsur en 1953. Consideremos $\mathcal{C}$ una clase de anillos cerrada para ideales e imágenes homomórficas. Diremos que una subclase $\mathcal{R}$ de $\mathcal{C}$ es radical (en $\mathcal{C}$) sí verifica que:

(1) las imágenes homomórficas de elementos de $\mathcal{R}$ pertenecen a $\mathcal{R}$,
(2) cada anillo $R \in \mathcal{C}$ contiene un ideal radical $\mathcal{R}(R)$ (es decir, un ideal de R que pertenece a $\mathcal{R}$) tal que todo ideal radical de R está contenido en $\mathcal{R}(R)$,
(3) $R/\mathcal{R}(R)$ no contiene ideales radicales.

Para todo anillo R, el ideal $\mathcal{R}(R)$ es llamado el radical de R. Los anillo que coinciden con su radical son llamados radicales y la clase de todos estos anillos es llamada la clase radical. Los anillos de radical cero son llamados $\mathcal{R}$-semisimples y la clase de todos estos anillos es llamada la clase $\mathcal{R}$-semisimple.

Por construcción los anillos $\mathcal{R}$-semisimples quedan determinados por la clase radical. Sorprendentemente también se tiene que los anillos radicales quedan caracterizados por la clase semisimple: un anillo $R \in \mathcal{C}$ es radical si y sólo si no existe un epimorfismo $f : R \to P$ con P semisimple.

Caracterizamos una subclase radical $\mathcal{R}$ de una clase $\mathcal{C}$ como aquélla que verifica: (1), las imágenes homomórficas de elementos de $\mathcal{R}$ están contenidas en $\mathcal{R}$ y (2), si $R \in \mathcal{C}$ es tal que toda imagen homomórfica de R contiene ideales radicales, entonces R es radical.

La clase radical es transitiva, esto es: si I es un ideal de R, entonces R es radical si y sólo si I y R/I son radicales. Por otro lado, la suma finita de ideales radicales es radical.

Por último caracterizamos las subclases semisimples de una clase de anillos. Una subclase $\mathcal{P}$ de una clase $\mathcal{C}$ que no contiene al anillo nulo es semisimple si y sólo si un anillo R de $\mathcal{C}$ pertenece a $\mathcal{P}$ si para todo ideal no nulo I de R existe un epimorfismo de anillos $f : I \to P$ para cierto $P \in \mathcal{P}$.

El radical de Jacobson.

Comenzamos definiendo el radical de Jacobson de un anillo R, no necesariamente unitario, como la intersección de los núcleos de las representaciones irreducibles del anillo, y lo denotamos por $rad(R)$. Obviamente tenemos que un anillo R es semiprimitivo si y sólo si $rad(R) = 0$.

Definimos ideal primitivo por la izquierda como aquel ideal P de R tal que el anillo cociente R/P es primitivo por la izquierda. Se demuestra que un ideal P es primitivo por la izquierda si y sólo si es el core de un ideal por la izquierda modular maximal, con lo que obtenemos las primeras caracterizaciones del radical de Jacobson: el radical de Jacobson de un anillo R coincide con

(1) la intersección de los ideales primitivos de R,
(2) la intersección de los ideales por la izquierda modulares maximales de R.

Hacemos hincapié en que en anillos unitarios todo ideal es modular, por lo que el radical de Jacobson coincide con la intersección de los ideales por la izquierda maximales.

Si M es un R-módulo simple, $rad(R) \subset ann_R(M)$, por lo que M tiene estructura de $R/rad(R)$-módulo simple. Así, $R/rad(R)$ tiene radical de Jacobson cero o, lo que es lo mismo, $R/rad(R)$ es un anillo semiprimitivo.

Comenzamos ahora una descripción por elementos del radical de Jacobson de un anillo. Definimos elemento casirregular como aquel $x \in R$ tal que existe $y \in R$ verificando $x+y-xy = 0$. Hacemos notar que en anillos unitarios esto es equivalente a que el elemento $1 - x$ sea inversible en R. Probamos que el radical de Jacobson de un anillo R está formado por elementos casirregulares, es más: para un anillo R, $rad(R)$ coincide con

(3) el mayor ideal por la izquierda casirregular de R,
(4) el mayor ideal por la derecha casirregular de R.

Tenemos entonces la siguiente caracterización de los elementos del radical de un anillo R. El radical de Jacobson de un anillo R coincide con:

(5) los $x \in R$ tales que xy es casirregular para todo $y \in R$,
(6) los $x \in R$ tales que yx es casirregular para todo $y \in R$.

Con lo que se demuestra que el radical de Jacobson que en principio hemos definido como una noción por la izquierda es en verdad un concepto simétrico. Así, tenemos nuevas caracterizaciones del radical: para un anillo R, $rad(R)$ coincide con

(7) la intersección de los cores de los ideales por la derecha modulares maximales,

(8) la intersección de los ideales primitivos por la derecha.

De aquí se obtiene un hecho ya anunciado: un anillo es semiprimitivo por la izquierda si y sólo si lo es por la derecha.

El radical de Jacobson de un anillo artiniano.

Comenzamos definiendo la noción de ideal nil como aquél en el que todos sus elementos son nilpotentes. Comprobamos que todo elemento nil es casirregular, con lo que obtenemos que todo ideal nil está contenido en el radical de Jacobson. Por último probamos que el radical de Jacobson de un anillo artiniano es nilpotente. Así, el radical de Jacobson de un anillo artiniano es el mayor ideal nilpotente del anillo. Se observa que esto implica que en anillos artinianos todo ideal nil es nilpotente.

Tenemos, al igual que en el caso de anillos semisimples y artinianos, un teorema que determina, salvo isomorfismos, los módulos simples sobre anillos artinianos: sea R un anillo artiniano y sea $rad(R)$ el radical de Jacobson de R. Consideremos $\overline{R} := R/rad(R)$. Entonces existe una biyección entre las componentes simples de $\overline{R}$ y las clases de isomorfía de R-módulos simples.

Con este resultado se obtiene el Teorema de Hopkins-Levitzki que establece que un anillo unitario y artiniano por la izquierda es noetheriano por la izquierda.

El nil radical inferior o radical primo.

Comenzamos la lección preguntándonos sí para un anillo R existirá un ideal I en R tal que R/I sea primo y todo ideal con esta condición contenga a I. Rápidamente llegamos a que tal ideal no tiene por que existir, basta tomar como anillo el producto de dos cuerpos. Con esto obtenemos que la clase de los anillos primos no es radical-semisimple.

Planteamos entonces el mismo problema en el caso semiprimo. Por tanto, para un anillo R, buscamos un ideal I que contenga a todos los divisores absolutos de cero del anillo. Como primer resultado obtenemos que el subgrupo generado por todos los divisores absolutos de cero de R, es un ideal de R, pero R/I no tiene por qué ser semiprimo. En este punto abandonamos esta estrategia aunque se propondrá como ejercicio la obtención del nilradical inferior como limite transfinito de tales cocientes.

Se define la noción de ideal primo como un ideal P de R tal que para cada par de ideales $I, J \subset R$, con $IJ \subset P$, se tenga que $I \subset P$ o $J \subset P$. Se dan unas primeras caracterizaciones de ideal primo en términos de ideales, cocientes y elementos:

Sea R un anillo y P un ideal de R. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) P es un ideal primo.
(2) R/P es un anillo primo.
(3) Para cualesquiera $a, b \in R$, $(RaR)(RbR) \subset P$ implica que $a \in P$ o $b \in P$.
(4) Para cualesquiera $a, b \in R$, $aRb \subset P$ implica que $a \in P$ o $b \in P$.

Diremos que un subconjunto S de R es un m-sistema sí para cualesquiera $a, b \in S$ existe $r \in R$ verificando que $axb \in S$. La noción de m-sistema está íntimamente ligada con la de ideal primo, así: (1) un ideal P de un anillo R es primo si y sólo si el complemento de P en R es un m-sistema, (2) dado un m-sistema S, cualquier ideal de R, maximal respecto a la propiedad de no cortar a S es primo.

Se define la noción de ideal semiprimo como un ideal P de R tal que para cada ideal $I \subset R$, con $I^2 \subset P$, se tenga que $I \subset P$ y al igual que en el caso de ideal primo se caracteriza en términos de ideales, cocientes y elementos. Sea R un anillo y P un ideal de R. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) P es un ideal semiprimo.
(2) R/P es un anillo semiprimo.
(3) Para cualquier $a \in R$, $(RaR)^2 \subset P$ implica que $a \in P$.
(4) Para cualquier $a \in R$, $aRa \subset P$ implica que $a \in P$.

Diremos que un subconjunto S de R es un n-sistema sí para cualquier $a \in S$ existe $r \in R$ tal que $axa \in S$. Tenemos entonces que un ideal I de un anillo R es semiprimo si y sólo si el complemento de I en R es un n-sistema.

Demostramos que todo n-sistema es unión de m-sistemas. Con esta propiedad obtenemos que un ideal de un anillo es semiprimo si y sólo si es intersección de ideales primos del anillo. De esto último se deduce que todo anillo semiprimo es producto subdirecto de anillos primos.

Dado un ideal I de un anillo R definimos:

$$\sqrt{I} := \{x \in R \mid \text{todo m-sistema que contiene a } x \text{ corta a I }\}.$$

Se tiene entonces que $\sqrt{I}$ es el menor ideal semiprimo del anillo que contiene a I. Definimos el nil radical inferior o radical de Baer-McCoy y lo representaremos por $Nil_*(R)$ como el menor ideal semiprimo de R, esto es, $\sqrt{\{0\}}$.

Tenemos entonces que dado un anillo R:

(1) R es semiprimo si y sólo si $Nil_*(R) = 0$.
(2) $R/Nil_*(R)$ es semiprimo.
(3) $Nil_*(R)$ es un ideal nil de R.
(4) $Nil_*(R) \subset rad(R)$.

En clase se debatirá el siguiente problema: sí la ideal del nilradical inferior consiste en encontrar un ideal, el mas pequeño posible, tal que el cociente no contenga ideales nilpotentes, ¿por que no tomar como ideal la suma de todos los ideales nilpotentes del anillo? Y se pedirá un ejemplo en donde la contención de (4) sea estricta.

El nil radical superior.

Nos encontramos con que un anillo semiprimo puede contener ideales nil. En esta sección vamos a estudiar un radical que elimina dichos ideales.

Comenzamos demostrando que sí I y J son respectivamente ideal e ideal por la izquierda (resp. por la derecha) nil de un anillo R, entonces $I + J$ es un ideal por la izquierda (resp. por la derecha) nil. Esto, permite definir el radical superior de un anillo R, que representaremos por $Nil^*(R)$, como la suma de todos los ideales nil de R.

Tenemos entonces que para cualquier anillo R:

(1) $Nil^*(R)$ es el mayor ideal nil de R.
(2) R no contiene ideales nil si y sólo si $Nil^*(R) = 0$.

(3) $Nil^*(R/Nil^*(R)) = 0$.

Para concluir esta lección se enuncia la conjetura de Köthe que afirma que un anillo sin ideales nil no contiene ideales por la izquierda, ni por la derecha nil. Damos varios enunciados equivalentes a este:

(1) R verifica la conjetura de Köthe.
(2) Todo ideal por la izquierda (resp. por la derecha) nil de R está contenido en $Nil^*(R)$.
(3) La suma de dos ideales por la izquierda (resp. por la derecha) nil de R es un ideal por la izquierda (resp. por la derecha) nil.
(4) Si I es un ideal por la izquierda nil, IR es un ideal nil.

Como consecuencia se obtiene que todo anillo artiniano verifica la conjetura de Köthe. Por último demostramos el Teorema de Levitzki que afirma que todo anillo noetheriano por la izquierda también verifica dicha conjetura.

El radical de Levitzki.

Introducimos la noción de conjunto localmente nilpotente: un subconjunto S de un anillo R es localmente nilpotente si cualquier subanillo generado por un subconjunto finito de S es nilpotente.

Demostramos que si I y J son dos ideales por la izquierda localmente nilpotentes, entonces IR, $I + J$ son localmente nilpotentes. Definimos el radical de Levitzki de un anillo R y lo representamos como L–$rad(R)$ como la suma de todos los ideales localmente nilpotentes de R.

Es claro que L–$rad(R)$ es el mayor ideal localmente nilpotente de R y que L–$rad(R)$ contiene a todos los ideales por la izquierda y por la derecha localmente nilpotentes.

Tenemos entonces que para un anillo R la relación entre los radicales estudiados hasta el momento es:

$$Nil_*(R) \subset L\text{–}rad(R) \subset Nil^*(R) \subset rad(R)$$

Si nuestro anillo R es artiniano, estos radicales coinciden y si es conmutativo $Nil_*(R) = L\text{–}rad(R) = Nil^*(R) = Nil(R)$. Por último mostramos un anillo primo R tal que $L\text{–}rad(R) \neq 0$ y un dominio de integridad D con un único ideal maximal, por tanto $Nil^*(D) = 0$ y $rad(D) \neq 0$.

Referencias

A.J. Berrick. M.E. Keating, *An Introduction to Rings and Modules with K.Theory in View*, Cambridge University Press, 2000.

E-A. Behrens, *Ring Theory*, Academic Press, New York, N.Y, 1972.

P.M. Cohn, *Algebra (II)*, John Wiley& Sons, 1977.

P.M. Cohn, *And Introduction to Ring Theory*, Springer-Verlag. New York, 2000.

J.C. McConnell. J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, John Wiley& Sons, 1987.

T.W.Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag. New York, 1974.

Nathan Jacobson, *Basic Algebra II*, W.H. Freeman and Company, New York, 1989.

T.Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Graduate texts in Mathematics, Springer, 1991.

L.H. Rowen, *Ring Theory I*, Accademic Press, Inc., New York, N.Y, 1988.

R. Wisbauer, *Free modules and Algebras: Bimodules Structure and Group Actions*, Longman, 1996.

K.A.Zhevlakov, A.M.Slinko, I.P.Shestakov, A-I. Shirshov., *Rings that are nearly associative*, Accademic Press, Inc., New York, N.Y, 1982.

TEMA 5.
ANILLOS DE DIVISIÓN. TEOREMAS DE CONMUTATIVIDAD.

Es claro, una vez visto el Teorema de Wedderburn-Artin, la importancia de los anillos de división en el desarrollo de una teoría general de anillos asociativos.

Los anillos de división se clasifican en dos grupos dependiendo de que tengan dimensión infinita o dimensión finita sobre su centro, que siempre es un cuerpo. Los primeros, bastante complejos, no fueron descubiertos hasta 1899 por Hilbert, mientras que los segundos no distan mucho de ser conmutativos. Veremos, en el capítulo 9, que los anillos de división de dimensión finita sobre su centro son precisamente los que verifican una identidad polinómica estándar, por lo que aplicando resultados más generales de este tema los podremos ver como subanillos de anillos de matrices sobre cuerpos algebraicamente cerrados.

Algunas construcciones de anillos de división.

En este momento los alumnos conocen un único ejemplo de anillo de división no conmutativo, los cuaternios de Hamilton, por tanto comenzamos este capítulo presentando algunas construcciones de estos objetos.

Empezamos con la construcción de D. Hilbert que proporcionó, en el año 1899, el primer ejemplo de anillo de división de dimensión infinita sobre su centro. Dado K un cuerpo y σ un automorfismo de K se considera $\Delta = K((X, \sigma))$ el anillo de las series formales de Laurent, con suma por componentes y multiplicación definida por la regla $Xa = \sigma(a)X$. Sea comprueba que Δ es un anillo de división. Se calcula el centro de Δ demostrándose que Δ es centralmente finito si y sólo si σ tiene orden finito. Por último, buscando el primer ejemplo de anillo de división que no es centralmente finito, se considera $\Delta = K((X, \sigma))$ para $K = \mathbb{Q}(T)$ y σ el automorfismo que manda T en $2T$.

Seguimos la sección presentando la construcción de las álgebras cíclicas de L. Dickson, que aparecen en el año 1906. Se comienza considerando una extensión de Galois $F \subset K$, con grupo de Galois, digamos G, cíclico de s elementos. Se considera σ un generador de G y $D = K \cdot 1 \oplus K \cdot X \oplus \cdots \oplus K \cdot X^{s-1}$, en donde la suma es por componentes y la multiplicación verifica las reglas: $X^s = a$ y $X \cdot b = \sigma(b) \cdot X$. Comprobamos entonces que D es una F-álgebra de dimensión s^2. En general estas álgebras no tienen que ser de división, aunque siempre son simples. Demostramos que $D \cong \mathcal{M}_s(F)$ si y sólo si a es una norma de la extensión $F \subset K$ y que, en el caso de que s sea un número primo, D es un anillo de división si y sólo si $a \in K$ no es una norma de la extensión.

Por último damos la construcción de Malcev-Neumann de los anillos de división de series de Laurent. Para tal construcción necesitamos un anillo R, un grupo ordenado $(G, \leq)$ y un homomorfismo de grupos, digamos w, de G en $Aut(R)$. Consideramos el anillo de Malcev-Neumann $A = R((G, w))$ consistentes en las sumas formales: $\alpha = \sum_{g \in G} r_g g$, con $r_g \in R$, tales que su soporte (en donde se define el soporte de α como $sopp(\alpha) := \{g \in G \mid r_g \neq 0\}$) es un subconjunto bien ordenado. Se define la suma en A por componentes y el producto como:

$$(\sum_{g \in G} r_g g)(\sum_{h \in G} s_h h) := \sum_{u \in G} (\sum r_g w_g(s_h))u$$

en donde $w_g = w(g)$ y la segunda suma es sobre todos los pares $(g, h) \in G \times G$ tales que $gh = u$. Como se vera mas adelante, el subanillo de todos los elementos de soporte finito es el anillo grupo asimétrico de R y G. Demostramos que si R es un anillo de división, entonces $A = R((G, w))$ es también anillo de división.

El Teorema de Frobenious.

Antes de entrar en el estudio de los anillos de división en general demostramos el Teorema de Frobenious que determina todas los anillos de división algebraicos sobre el cuerpo de los reales:

Un anillo de división algebraico sobre el cuerpo de los reales es isomorfo a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$ (el álgebra de división de los cuaternios reales).

Como ejercicio se propondrá demostrar que la clasificación dada por Frobenious es aplicable a todo cuerpo real-cerrado, esto es, todo cuerpo F tal que $\sqrt[2]{-1} \notin F$ y $F(\sqrt[2]{-1})$ sea algebraicamente cerrado.

Teoremas de conmutatividad.

Comenzamos esta sección recordando el Teorema de Wedderburn, que establece que todo anillo de división finito es cuerpo. Como corolarios a este teorema demostramos que todo subanillo finito de un anillo de división es cuerpo, que todo subgrupo finito de un anillo de división de característica distinta de cero es cíclico, así como el Teorema de Jacobson que establece que todo anillo de división algebraico sobre un cuerpo finito es conmutativo.

Demostramos un Lema de Herstein, publicado en 1968, que establece que si Δ es un anillo de división de característica $p > 0$ y $a \in \Delta^*$ es un elemento no central de torsión entonces existe $y \in \Delta^*$ tal que $yay^{-1} = a^i \neq a$ para $i > 0$.

Este lema permitirá demostrar un primer caso del Teorema de Jacobson-Herstein: sea R un anillo tal que para todo $a, b \in R$ existe $n = n_{(a,b)}$ tal que $[a, b]^n = [a, b]$, entonces R es conmutativo.

La demostración de este teorema la haremos en varios pasos:

(1). Demostraremos, a partir del Lema de Herstein, que el resultado es cierto para anillos de división.

(2). A partir del Teorema de densidad de Jacobson extenderemos el resultado a anillos primitivos.

(3). Gracias a que todo anillo semiprimitivo es producto subdirecto de anillos primitivos, extenderemos el resultado a anillos semiprimitivos.

(4). Por último ampliamos el resultado para anillos en general.

Como corolario a este resultado obtenemos un teoremas de Jacobson: Sea R un anillo tal que para todo $a \in R$ existe $n = n_a \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = a$. Entonces R es conmutativo.

Referencias

E-A. Behrens, *Ring Theory*, Academic Press, New York, N.Y, 1972.

Nathan Jacobson, *Structure of Rings*, American Mathematical Society, Vol XXXVII, 1968.

Nathan Jacobson, *Basic Algebra I*, W.H. Freeman and Company, New York, 1985.

T.Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Graduate texts in Mathematics, Springer, 1991.

L.H. Rowen, *Ring Theory I*, Accademic Press, Inc., New York, N.Y, 1988.

L.H. Rowen, *Ring Theory II*, Accademic Press, Inc., New York, N.Y, 1988.

TEMA 6.
ANILLOS SEMIPRIMOS CON ZÓCALO ESENCIAL.

En este capítulo vamos a estudiar una clase especial de anillos primitivos (resp. semiprimitivo), los anillos primos con zócalo no nulo (resp. semiprimos con zócalo esencial).

Comenzamos estudiando los anillos primos que coinciden con su zócalo. Éstos pueden verse como una generalización natural de los anillos primos y artinianos: mientras que estos últimos pueden representarse como anillos de endomorfismos de espacios vectoriales de dimensión finita, los primeros son isomorfos a anillos de endomorfismos de rango finito de espacios vectoriales de dimensión arbitraria. Es más, todo anillo primo con zócalo no nulo se puede sumergir en un anillo de endomorfismos de un espacio vectorial de tal modo que su zócalo va a coincidir con los elementos del anillo que tengan rango finito.

Por otra parte todo ideal por la izquierda minimal de un anillo primo R resulta ser un R-módulo por la izquierda simple y fiel, por lo que los anillo primos con zócalo no nulo son primitivos. Como ya se anuncio, en estos anillos vamos a tener la unicidad, salvo isomorfismos, de las estructuras que aparecen en el Teorema de Densidad de Jacobson.

El zócalo de un anillo.

Se define el zócalo por la izquierda (resp. por la derecha) de un anillo R como el zócalo de R considerado éste como R-módulo por la izquierda (resp. R-módulo por la derecha). Por tanto, el zócalo por la izquierda (resp. por la derecha) de un anillo R es la suma de los ideales por la izquierda (resp. por la derecha) minimales de R. Seguidamente se demuestra que ambos zócalos son ideales del anillo, aunque en general no tienen por que coincidir. Cuando ambos zócalos coinciden se dice que R tiene zócalo y se denota a éste por $Zoc(R)$.

Se estudian los ideales por la izquierda (resp. por la derecha) minimales de un anillo demostrándose el Lema de Brauer que afirma que si I es un ideal por la izquierda (resp. por la derecha) minimal de un anillo R, entonces $I^2 = 0$ o existe un idempotente de división $e \in I$ tal que $I = Re$ (resp. $I = eR$). Este resultado caracteriza los ideales por la izquierda (resp. por la derecha) minimales en anillos semiprimos, lo que permite demostrar que en anillos semiprimos los zócalos laterales coinciden.

Se demuestra que todo anillo primo que posee un ideal por la izquierda minimal es primitivo: en un anillo primo todo ideal por la izquierda minimal puede verse como un R-módulo por la izquierda simple y fiel, por lo que estos anillos son primitivos por la izquierda, es más, por el Lema de Brauer cada ideal por la izquierda minimal da lugar a un ideal por la derecha minimal, por lo también son primitivos por la derecha. Además, si I es un ideal por la izquierda minimal de un anillo primo R, todos los R-módulos por la izquierda simples y fieles de R son isomorfos, como R-módulos por la izquierda, a I y el anillo de endomorfismos de cualquier R-módulo por la izquierda simple y fiel, que es un anillo de división por el Lema de Schur, es isomorfo a eRe, en donde e es cualquier idempotente de división de R.

Se demuestra que en anillos semiprimos el zócalo es hereditario para ideales: si I es un ideal de un anillo semiprimo R, $Zoc(I) = I \cap Zoc(R)$. Así como que para todo idempotente $e \in R$, $Zoc(eRe) = eRe \cap Zoc(R)$.

Se caracterizan los elementos del zócalo de un anillo semiprimo R como aquellos $x \in R$ para los que se satisface la condición de cadena descendente para ideales por la izquierda principales de la forma Ry con $y \in Rx$. Esto lleva a una cadena de resultados interesantes:

(1) Los anillos semiprimos y unitario que coincide con su zócalo son precisamente los semiprimos artinianos.

(2) Si e es un idempotente contenido en el zócalo de un anillo semiprimo R, eRe es un anillo semiprimo y artiniano. Por tanto, y en virtud del Teorema de Wedderburn-Artin , eRe es una suma directa finita de anillos de matrices sobre anillos de división.

(3) Se demuestra un teorema de Litoff, que afirma que un elemento x en un anillo semiprimo R está contenido en el zócalo de R si y sólo si existe un idempotente $e \in Zoc(R)$ tal que $x \in eRe$, en donde eRe es un anillo semiprimo y artiniano. Como consecuencia obtenemos que el zócalo de un anillo primo es "localmente" un anillo de matrices sobre un anillo de división.

(4) El zócalo de un anillo semiprimo es un ideal regular von Neumann.

Como consecuencia de este último hecho obtenemos que un anillo semiprimo con zócalo esencial es semiprimitivo, es decir, tiene radical de Jacobson cero.

Teorema de estructura de los anillos semiprimos con zócalo esencial.

Se estudia la descomposición del zócalo de un anillo semiprimo como suma de sus distintas componentes homogéneas demostrándose que cada una de ellas es un ideal del anillo que visto como anillo es simple y coincide con su zócalo.

Con este hecho se demuestra que un anillo semiprimo con zócalo esencial es producto subdirecto esencial de anillos primos con zócalo no nulos. Más concretamente si $Zoc(R) = \oplus I_\alpha$, siendo $\{I_\alpha\}$ las componentes homogéneas de $Zoc(R)$:

$$\oplus I_\alpha \triangleleft R \subset \prod R/ann_R(I_\alpha),$$

en donde para cada α, $R/ann_R(I_\alpha)$ es un anillo primo con zócalo no nulo.

Estructura geométrica de los anillos primos con zócalo no nulo.

Se introduce la noción de par dual de espacios vectoriales. Como ejemplo se ve que $(V, V^*, <>, \Delta)$, en donde V^* denota al dual de V, es un par dual de espacios vectoriales, llamado el dual pleno asociado a V.

Se demuestra que si $(V, W, <>, \Delta)$ es un par dual de espacios vectoriales, W es isomorfo a un subespacio de V^* y que si además V tiene dimensión finita, W es isomorfo a V^*. Por último se demuestra el Teorema de la base dual.

Se define el concepto de aplicación continua respecto de un par dual de espacios vectoriales y se demuestra que el conjunto de tales aplicaciones, denotando por $\mathcal{L}_W(V)$ es un anillo primo con zócalo igual a $\mathcal{F}_W(V)$, el conjunto de aplicaciones continuas de rango finito. Por último se demuestra que un anillo R es primo con zócalo no nulo si y sólo si existe un par dual de espacios vectoriales tal que $\mathcal{F}_W(V) \subset R \subset \mathcal{L}_W(V)$. Además, en este caso, $Zoc(R) = \mathcal{F}_W(V)$, es un ideal mínimo de R. Se observa que bajo esta representación, R es un subanillo denso de un anillo de endomorfismos de un espacio vectorial sobre un anillo de división.

Referencias

E-A. Behrens, *Ring Theory*, Academic Press, New York, N.Y., 1972.

J.C. McConnell. J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, John Wiley& Sons, 1987.

N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, Van Nostrand Reinhold Company, 1953.

Nathan Jacobson, *Structure of Rings*, American Mathematical Society, Vol XXXVII, 1968.

M. Petrich, *Rings and Semigroups*, Springer-Verlag, 1974.

P. Ribenboim, *Rings and modules*, Interscience Publishers , New York, N.Y, 1969.

L.H. Rowen, *Ring Theory I*, Accademic Press, Inc., New York, N.Y, 1988.

TEMA 7.
ANILLOS SEMIPERFECTOS.

En este tema vamos a estudiar ciertas clases de anillos con radical de Jacobson distinto de cero. Comenzaremos el tema con un estudio más profundo de los anillos locales, éstos ya aparecieron con la definición de módulo fuertemente indescomponibles y el Teorema de Krull-Schmidt. Como generalización de los anillos locales se introducirá la noción de anillo semilocal y posteriormente, añadiendo la propiedad de elevación de idempotentes, la noción de anillo semiperfecto. Sorprendentemente al igual que los anillos de división son la estructura básica para la construcción de los anillos semiprimos y artinianos, los anillos locales van a ser la estructura básicas con los que se construirán los anillos semiperfectos de cociente simple: éstos serán anillos de matrices sobre anillos locales.

Todos los anillos que aparecen entre la lección 28 a la 30 serán, salvo que se diga lo contrario, unitarios.

Anillos locales y semilocales.

Empezamos la lección recordando el concepto de anillo local y estableciendo distintas caracterizaciones de éstos: para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $R/Rad(R)$ es un anillo de división.
(2) R posee un único ideal por la izquierda maximal.
(3) R posee un único ideal por la derecha maximal.
(4) $R-U(R)$ es un ideal de R.
(5) $R-U(R)$ es un subgrupo de R.
(6) Para cualquier n, si $a_1+a_2,\cdots+a_n \in U(R)$, entonces existe un i tal que $a_i \in U(R)$.
(7) Si $a+b \in U(R)$, entonces $a \in U(R)$ o $b \in U(R)$.

En donde $U(R)$ denota el conjunto de los elementos inversibles de R. Recordamos aquí que los anillos locales no contienen más idempotentes que los triviales.

Damos algunos ejemplos de anillos locales:

– La localización de un anillo conmutativo por un ideal primo. Como ejemplo de esto, el subanillo Z^p de $\mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{Z}$ un número primo, formado por todos los elementos que se pueden escribir con denominador no multiplo de p.

– Dado R un anillo local, $R[[X]]$ el anillo de series formales, así como el anillo de series formales asimétrico $R[[X;\sigma]]$.

– El subanillos del anillo de matrices triangulares superiores sobre un anillo de división formado por las matrices de diagonal constante.

Por último caracterizamos los anillos artinianos que son locales como aquéllos que sólo poseen los idempotentes triviales.

Se introduce el concepto de anillo semilocal como una generalización de los anillos locales; se dice que un anillo R es semilocal si $R/Rad(R)$ es un anillo semisimple. Claramente tanto los anillos locales, como los artinianos por la izquierda (resp. por la derecha) son anillos semilocales. Es más, el producto directo finito de anillos semilocales es semilocal y si R es un anillo semilocal, cualquier cociente de R así como $\mathcal{M}_n(R)$, para $n \in \mathbb{N}$, son semilocales.

Ponemos de manifiesto que esta definición es coherente con la dada en anillos conmutativos demostrando que si un anillo R contiene un número finito de ideales por la izquierda maximales entonces el anillo es semilocal. El recíproco no se tiene en general, aunque sí es cierto cuando $R/J(R)$ es conmutativo.

Para concluir el estudio de los anillos semilocales demostramos que éstos son Dedekind-finitos (un anillo R se dice que es Dedekind-finito si dados $a, b \in R$ tales que $ab = 1$, se tiene que $ba = 1$). Una generalización de este hecho, demostrado por H. Bass en un trabajo pionero sobre K-Teoría, afirma:

Sea R un anillo semilocal, sea $a \in R$ e I un ideal por la izquierda de R. Entonces $Ra + I = R$ si y sólo si existe $y \in I$ tal que $a + y \in U(R)$. Que demuestra que todo anillo semilocal posee rango estable 1.

Por último caracterizamos los anillos semilocales por propiedades procedentes de su categoría de módulos, así:

Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) R es semilocal.
(2) Todo producto directo de R-módulos simples es semisimple.
(3) Todo producto directo de R-módulos semisimples es semisimple.
(4) Para todo R-módulo M, $Zoc(M) = \{m \in M | (rad(R))m = 0\}$.

Anillos semiperfectos.

Comenzamos introduciendo el concepto de anillo semiperfecto: se dirá que un anillo R es semiperfecto sí es semilocal y todo idempotente de $R/Rad(R)$ se eleva a un idempotente de R.

Como ejemplos de anillos semiperfectos se ven los anillos locales y los anillos artinianos por la izquierda (resp. por la derecha), este último resultado se deduce del hecho de que el radical de Jacobson de un anillo artiniano es nilpotente y de que los idempotentes se elevan módulo cualquier ideal nil. Así mismo se demuestra que la suma directa finita de anillos semiperfectos es un anillo semiperfecto.

Construimos un anillo R que es un dominio conmutativo y unitario con unicamente dos ideales maximales, lo que da un ejemplo de un anillo semilocal que no es semiperfecto.

Comenzamos el estudio de los anillos semiperfectos viendo algunos resultados sobre idempotentes.

Se demuestra que si $M \subset Rad(R)$ es un ideal de R y se pueden elevar idempotentes módulo M, entonces se pueden elevar familias numerables de idempotentes ortogonales módulo M, es decir: dado $\{\overline{x}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de idempotentes ortogonales de R/M, existe $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de idempotentes ortogonales de R tales que $\overline{x}_i = \overline{e}_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por tanto, en anillos semiperfectos se elevan familias numerables de idempotentes ortogonales.

Se introducen las distintas descomposiciones de Peirce asociadas a un idempotente, digamos e, de un anillo R:

$$\begin{aligned}
R =& Re \oplus R(1-e)\\
R =& eR \oplus (1-e)R\\
R =& eRe \oplus eR(1-e) \oplus (1-e)Re \oplus (1-e)R(1-e)
\end{aligned}$$

y se demuestra que un anillo R se puede descomponer como suma directa de ideales por la izquierda (resp. por la derecha), es decir, $R = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$ si y sólo si existen n idempotentes ortogonales en R tales que $1 = \sum e_i$, en donde $e_i \in I_i$ y $I_i = Re_i$ (resp. $I_i = e_iR$). Como consecuencia de este hecho se obtiene la siguiente caracterización de idempotente primitivo (un idempotente e de un anillo R se dice primitivo sí no se puede escribir como suma de dos idempotentes ortogonales) y de idempotente local:

Sea R un anillo y e un idempotente de R. Son equivalentes:

(1) $e \in R$ es primitivo.
(2) El ideal por la izquierda Re es indescomponible (resp. fuertemente indescomponible).
(3) El ideal por la derecha eR es indescomponible (resp. fuertemente indescomponible).
(4) El subanillo eRe no contiene idempotentes no triviales (resp. eRe es un anillo local).

Obviamente todo idempotente local es primitivo. Con el siguiente resultado obtendremos que en anillos semiperfectos ambos conceptos son equivalentes.

Se demuestra que dado un anillo semiperfecto R y un idempotente $e \in R$, el subanillo eRe es semiperfecto. Es más, para un anillo no necesariamente unitario R:

$$Rad(eRe) = Rad(R) \cap eRe = e(Rad(R))e$$
$$eRe/Rad(eRe) \cong \overline{e}(R/Rad(R))\overline{e}$$

Tenemos entonces que un idempotente e de un anillo semiperfecto R es local (equivalentemente primitivo) si y sólo si $\overline{e} \in R/Rad(R)$ es un idempotente de división.

Se demuestra un teorema de descomposición para anillos semiperfectos: sea R un anillo semiperfecto, entonces considerado R como grupo aditivo se tiene que $R = S \oplus M$, en donde M es un subgrupo del radical de Jacobson de R y S es un subanillo de R tal que S es una suma directa finita de anillos semiperfectos $R_1, R_2, \ldots, R_n$ cuyos anillos factores son simples. Más adelante se verá que esta descomposición es única salvo automorfismos internos.

La demostración de este teorema consiste en tomar una familia de idempotentes centrales, $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ de $R/Rad(R)$ tales que $\overline{R_i} := \overline{e}_i R/Rad(R)$ sea simple y elevarlos a una familia de idempotentes ortogonales de R. Los anillos R_i no son más que e_iRe_i, por tanto son ideales internos, y M no es más que el "residuo" que aparece en la descomposición de Peirce de R respecto de los $\{e_i\}$, ya que desgraciadamente los idempotentes centrales del cociente no se elevan a idempotentes centrales de R.

Como corolario a este resultado obtenemos que un anillo conmutativo es semiperfecto si y sólo si es isomorfo a un coproducto finito de anillos locales (conmutativos).

Anillos semiperfectos de cocientes simple.

Comenzamos esta lección introduciendo una relación de equivalencia en el conjunto de los idempotentes de un anillo R.

Sea R un anillo y sean e y f dos idempotentes de R. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) Re y Rf son isomorfos como R-módulos por la izquierda.
(2) Existen $a, b \in R$ tales que $ab = e$ y $ba = f$.
(3) eR y fR son isomorfos como R-módulos por la derecha.

En el caso de que se verifique alguna de las condiciones del teorema anterior se dice que e y f son dos idempotentes isomorfos.

Como primer resultado tenemos que dado un anillo R y dos idempotentes $e, f \in R$, e es isomorfo a f en R si y sólo si $\overline{e}$ es isomorfo a $\overline{f}$ en $R/Rad(R)$.

De lo anterior se deduce que un anillo R es semiperfecto si y sólo si el 1 se puede escribir como suma de idempotentes locales ortogonales, o lo que es lo mismo, si y sólo si R se puede descomponer como suma directa finita de ideales por la izquierda fuertemente indescomponibles.

Tenemos por tanto que si k es un anillo local, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $R = \mathcal{M}_n(k)$ es un anillo semiperfecto de cociente simple ($R/rad(R) \cong \mathcal{M}_n(\Delta)$ con $\Delta = k/rad(R)$, anillo de división). Usando el hecho de que en un anillo semiperfecto de cociente simple dos idempotentes primitivos son isomorfos obtenemos que éstos son los únicos anillos semiperfectos de cociente simple, esto es:

Sea R un anillo. Entonces R es semiperfecto y $R/Rad(R)$ es simple si y sólo si R es isomorfo a $\mathcal{M}_n(k)$, en donde k es un anillo local.

Anillos semiperfectos no unitarios.

Esta lección se plantea como un trabajo de investigación para algún (algunos) alumno(s) intrepido(s). Planteamos que sucederá con los anillos semiperfectos no unitarios, es decir, los anillos R tales que $R/rad(R)$ es semisimple y los idempotente se elevan módulo el radical.

Como primera cuestión se planteará sí la unitización de un anillo semiperfecto será semiperfecto, a lo que se tendrá que concluir que no.

Se plantea entonces que todo anillo semiperfecto, digamos R, contiene un idempotente e tal que $R = eRe + rad(R) = S \oplus M$, en donde eRe es semiperfecto y unitario, S es una suma directa de anillos semiperfectos y unitarios de cocientes simples (por lo que es isomorfo a una suma directa de anillos de matrices sobre anillos locales) y M es un subgrupo de R contenido en $rad(R)$.

Por último se le pantea la unicidad de dicha descomposición.

Referencias

M.F. Atiyah. I.G. Macdonald., *Introducción al álgebra conmutativa*, Ed. Reverté, 1980.

E-A. Behrens, *Ring Theory*, Academic Press, New York, N.Y, 1972.

P.M. Cohn, *Algebra (II)*, John Wiley& Sons, 1977.

Nathan Jacobson, *Structure of Rings*, American Mathematical Society, Vol XXXVII, 1968.

N. Jacobson, *Basic Algebra II*, W.H. Freeman and Company, New York, 1989.

T.Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Graduate texts in Mathematics, Springer, 1991.

J. Lambek, *Lectures on rings and modules*, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y, 1976.

L.H. Rowen, *Ring Theory I*, Accademic Press, Inc., New York, N.Y, 1988.

TEMA 8.
ANILLOS DE COCIENTES. TEOREMAS DE GOLDIE.

Comenzamos recordando el proceso de construcción del cuerpo de fracciones de un dominio de integridad. Este hecho demuestra que todo dominio de integridad puede verse como subanillo de un cuerpo, o lo que es lo mismo, de esta forma se consigue sumergir una estructura bastante buena, la de dominio de integridad, en una mejor, la de cuerpo. En este tema vamos a dar distintos tipos de anillos de cocientes, que no serán más que extensiones de un anillo dado que mejorarán considerablemente las propiedades de éste. Así, por ejemplo, el anillo clásico de cocientes por la izquierda (que en esencia lo que pretende es dado un anillo R construir un anillo Q extensión de R en donde cualquier elementos regular de R sea inversible en Q) de un anillo semiprimo y noetheriano por la izquierda resulta ser un anillo semiprimo y artiniano por la izquierda, con lo que quedan determinados los anillos semiprimos noetherianos por la izquierda como ordenes clásicos por la izquierda en anillos semiprimos y artinianos. Con un teorema similar se determinarán los anillos no singulares por la izquierda con dimensión uniforme por la izquierda finita como aquéllos que son ordenes de Utumi por la izquierda, otra vez, en anillos semiprimos y artinianos por la izquierda.

Localización en anillos no conmutativos.

Introducimos el concepto de localización en un anillo que no tiene que ser necesariamente conmutativo: sea R un anillo y S un subconjunto multiplicativamente cerrado de R, definimos la localización de R en S como un par (R_S, ϕ) en donde R_S es un anillo y $\phi : R \to R_S$ es un homomorfismo de anillos que verifica:

(1) $\phi(S) \subset Inv(R_S)$,
(2) para cada $q \in R_S$ existe $a \in R$, $s \in S$ tales que $q = \phi(s)^{-1}\phi(a)$ y
(3) $Ker(\phi) = \{r \in R | sr = 0 \text{ para algún } s \in S\}$.

Nos preguntamos cuando dado un subconjunto multiplicativamente cerrado S de un anillo R existe una localización de R en S y obtenemos dos condiciones necesarias sobre el conjunto S:

(1) para todo $a \in R$, $s \in S$ se tiene que $Sa \cap Rs \neq \emptyset$. En este caso se dice que S es permutable por la izquierda,
(2) para todo $a \in R$, $s' \in S$ tal que $as' = 0$ existe $s \in S$ con $sa = 0$. En este caso se dice que S es reversible por la izquierda.

Un subconjunto no vacío S que verifique las dos condiciones anteriores se dirá que es un conjunto de denominadores por la izquierda de R.

Demostramos un teorema de Asano, extensión de un teorema probado por Ore en los años 30, que demuestra que una condición necesaria y suficiente para que exista la localización de R en S es que S sea un conjunto de denominadores por la izquierda de R. Además, en este caso, para todo homomorfismo $f : R \to T$ con $f(S) \subset Inv(T)$ existe un único morfismo de anillos $g : R_s \to T$ tal que $g\phi = f$, por lo que la localización de R en S, de existir, es única salvo isomorfismos.

Ordenes clásicos por la izquierda. Condición de Ore.

Un caso especial de localización es cuando el subconjunto S está formado por elementos regulares. En este caso podemos considerar $R \subset R_S$. Dedicamos esta lección para este tipo de localizaciones.

Diremos que un subanillo R de un anillo Q es un orden clásico por la izquierda en Q o que Q es un anillo clásico de cocientes por la izquierda de R si:

(1) $Reg(R) \subset Inv(Q)$,
(2) dado $q \in Q$ existen $a \in Reg(R)$, $b \in R$ tales que $q = a^{-1}b$.

Como primer ejemplo tenemos que todo dominio de integridad es un orden clásico por la izquierda en su cuerpo de fracciones.

De los resultados de la lección anterior se obtiene la condición dada por Ore para que un anillo posea anillo clásico de cocientes por la izquierda, ésta es: para todo $x \in Reg(R)$, $y \in R$ existe $a \in Reg(R)$, $b \in R$ tales que $ax = by$. En este caso se dice que R es de Ore por la izquierda. Es claro entonces que si R es un anillo de Ore por la izquierda, el anillo clásico de cocientes por la izquierda, al que denotaremos por $Q^l_{cl}(R)$, es único salvo isomorfismos.

Existen anillos, incluso dominios, que son de Ore por la izquierda, pero no lo son por la derecha. Como ejemplo damos $F[X, \sigma]$, el anillo de polinomios asimétricos en donde F es un cuerpo y $\sigma : F \to F$ un monomorfismo de anillos no sobreyectivo.

Por último demostramos la propiedad del denominador común para ordenes clásicos por la izquierda: sea R un orden clásico por la izquierda en un anillo Q. Entonces, dados $q_1, q_2, \ldots, q_n \in Q$ existen $a \in Reg(R)$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in R$ tales que $q_i = a^{-1}b_i$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.

Anillos generales de cocientes por la izquierda.

Estudiamos una segunda noción de anillo de cocientes, los anillo generales de cocientes por la izquierda, que fueron introducidos por Utumi en la década de los 50 del siglo XX. Sea R un subanillo de un anillo Q. Se dice que Q es un anillo general de cocientes por la izquierda de R, o que R es un orden de Utumi por la izquierda en Q, si para cualesquiera $p, q \in Q$, con $p \neq 0$, existe $x \in R$ tal que $xp \neq 0$ y $xq \in R$.

Relacionamos los anillos generales de cocientes por la izquierda con los ordenes clásicos por la izquierda demostrando que todo orden clásico por la izquierda es de Utumi por la izquierda.

Mostramos, para este nuevo tipo de orden, una especie de propiedad del denominador común: sea Q un anillo general de cocientes por la izquierda de R, entonces dados $q_1, q_2, \ldots, q_n \in Q$, con $q_1 \neq 0$, existe $x \in R$ tal que $xq_1 \neq 0$ y $xq_i \in R$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Una condición necesaria y suficiente para que un anillo tenga un anillo general de cocientes por la izquierda es que no posea divisores totales de cero por la derecha. Obviamente un anillo puede tener más de un anillo general de cocientes (si Q es un anillo general de cocientes por la izquierda de R, cualquier anillo S tal que $R \subseteq S \subseteq Q$, es un anillo general de cocientes por la izquierda de R). No obstante establecemos la existencia de un anillo general de cocientes por la izquierda "maximal" para todo anillo R sin divisores absolutos de cero por la derecha, a saber: dado un anillo R sin divisores absolutos de cero por la derecha existe un anillo Q tal que:

(1) Q es un anillo general de cocientes por la izquierda de R,
(2) si T es un anillo general de cocientes por la izquierda de R, existe un único monomorfismo de anillos $\phi : T \to Q$ tal que $\phi(r) = r$ para todo $r \in R$.

El anillo anterior es único salvo isomorfismos y será denotado por $Q^l_{max}(R)$,

En lo que sigue de la lección vamos a mostrar la estrecha relación existente entre un anillo R y cualquier anillo general de cocientes por la izquierda suyo.

Comenzamos introduciendo algunas nociones que serán necesarias en las lecciones siguientes:

Introducimos el ideal singular por la izquierda (resp. por la derecha) de un anillo R, a saber:

$$Z_l(R) := \{x \in R \mid lan(x) \text{ es un ideal por la izquierda esencial de } R\},$$

demostramos que es un ideal de R. Definimos anillo no singular por la izquierda (resp. no singular por la derecha y no singular). Como ejercicio se propondrá demostrar que un anillo conmutativo es no singular si y sólo si es semiprimo.

Introducimos la noción de dimensión uniforme o dimensión de Goldie: diremos que un R-módulo M tiene dimensión de Goldie finita si no existen sumas directas infinitas de submódulos no nulos. Demostramos entonces que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que M contiene una suma directa de n submódulos y que cualquier suma directa de submódulos de M tiene menos de n sumandos, a este n se le denomina la dimensión uniforme o dimensión de Goldie de M y se denota por $u - dim_R(M)$. Definimos entonces la dimensión de Goldie por la izquierda (resp. por la derecha) de un anillo R como la dimensión de éste como R-módulo por la izquierda (resp. por la derecha).

Observamos entonces que los anillos semisimples (y unitarios) son no singulares y tienen dimensión uniforme por la izquierda y por la derecha finita.

Tenemos entonces el teorema que veníamos buscando y que relaciona las propiedades de un anillo R con las de cualquier anillo general de cocientes por la izquierda suyo: sea Q un anillo general de cocientes por la izquierda de R. Entonces

(1) Para todo ideal por la izquierda no nulo $\mathcal{L}$ de Q, $\mathcal{L} \cap R \neq 0$.
(2) Si R es semiprimo (primo), Q es semiprimo (primo).
(3) Dado $X \subset R$, $lan_R(X) = lan_Q(X) \cap R$.
(4) Dados $X, Y \subset R$, $lan_R(X) \subset lan_R(Y)$ si y sólo si $lan_Q(X) \subset lan_Q(Y)$.
(5) $Z_l(R) = R \cap Z_l(Q)$.

(6) R es no singular por la izquierda si y sólo si Q es no singular por la izquierda.
(7) R tiene dimensión uniforme por la izquierda finita si y sólo si Q tiene dimensión uniforme por la izquierda finita. Además, en este caso ambas dimensiones coinciden.

Anillos de Goldie por la izquierda. Teorema clásico de Goldie.

Comenzamos la lección definiendo anillo de Goldie por la izquierda (resp. por la derecha) así como anillo de Goldie. Obtenemos que todo anillo noetheriano por la izquierda es de Goldie por la izquierda.

Demostramos algunas propiedades interesantes de un anillo, R, semiprimo de Goldie por la izquierda:

(1) para todo $a \in R$ tal que $lan(a) = 0$ se verifica que $(a]_R$ es un ideal por la izquierda esencial de R. Además, en este caso, $a \in Reg(R)$.
(2) Para todo ideal por la izquierda I de R existe $a \in I$ tal que $lan(a) \cap I = \{0\}$.
(3) Un ideal por la izquierda de R es esencial si y sólo si contiene un elemento regular.

Como corolario a este resultado obtenemos que si R es un anillo semiprimo de Goldie por la izquierda $Q^l_{max}(R) = Q^l_{cl}(R)$. Demostramos entonces el Teorema Clásico de Goldie: para un anillo R los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) R es un orden clásico por la izquierda en un anillo semiprimo y artiniano.
(2) R es semiprimo de Goldie por la izquierda.
(3) R es semiprimo, no singular por la izquierda con dimensión uniforme por la izquierda finita.
(4) Un ideal por la izquierda I de R es esencial si y sólo si contiene un elemento regular.

Además, si se verifica alguna de las condiciones anteriores, R es primo si y sólo si $Q := Q^l_{cl}(R)$ es simple.

Los teoremas de Johnson y Gabriel.

Siguiendo la línea del Teorema de Goldie, los teoremas de Johnson y Gabriel caracterizan cierta clase de anillos en función de su anillo de cocientes por la izquierda maximal. Así, en el resultado de Johnson se establece que un anillo es no singular por la izquierda si y sólo si su anillo de cocientes por la izquierda maximal es regular von Neumann.

El resultado de P. Gabriel determinará los anillos tales que su anillo de cocientes por la izquierda maximal es semiprimo y artiniano, a saber, los anillos no singulares por la izquierda que tienen dimensión uniforme por la izquierda finita.

El Teorema de Faith-Utumi.

Se comienza demostrando que si D es (un dominio de Ore por la izquierda que es) un orden por la izquierda en un anillo de división Δ, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_n(D)$ es un orden clásico por la izquierda en $\mathcal{M}_n(\Delta)$.

Si pensamos ahora en un anillo simple y artiniano Q, tenemos, por el Teorema de Wedderburn-Artin, que Q posee una cierta estructura geométrica, ya que puede verse como el anillo de endomorfismos de un espacio vectorial sobre un anillo de división, o lo que es lo mismo, $Q \cong \mathcal{M}_n(\Delta)$ en donde $n \in \mathbb{N}$ y Δ es un anillo de división. Cabe preguntarse, sí existe alguna relación entre esta estructura geométrica y cualquier orden clásico por la izquierda suyo. La respuesta a esta cuestión la contesta el llamado Teorema de Faith-Utumi:

Sea R un orden por la izquierda en un anillo Q primo y artiniano. Entonces existe un subanillo R' de R, un natural $n \in \mathbb{N}$, un dominio de Ore D que es un orden en un anillo de división Δ y un isomorfismo $f : Q \to \mathcal{M}_n(\Delta)$ tales que:

$$\mathcal{M}_n(D) = f(R') \cong R' \subset R \subset Q \cong f(Q) = \mathcal{M}_n(\Delta)$$

En la demostración de este teorema se hace ver que no toda representación geométrica del anillo Q es válida, esto es, sí R es un orden clásico por la izquierda en $\mathcal{M}_n(\Delta)$, con Δ un anillo de división, no implica que exista un subanillo D de Δ tal que D sea un orden clásico por la izquierda en Δ y $\mathcal{M}_n(D) \subset R \subset \mathcal{M}_n(\Delta)$. Y se ve que una condición necesaria y suficiente para que este hecho se de es que $e_{ii}Re_{ii} \cap R \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, en donde los e_{ii} representan a las matrices unidad de $\mathcal{M}_n(\Delta)$.

Referencias

E-A. Behrens, *Ring Theory*, Academic Press, New York, N.Y, 1972.

P.M. Cohn, *Algebra (II)*, John Wiley& Sons, 1977.

J.C. McConnell. J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, John Wiley& Sons, 1987.

T.W.Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag. New York, 1974.

K.R. Goodearl, *Ring Theory. Nonsingular Rings and Modules.*, Pure and Applied Matrhematics, 1976.

Nathan Jacobson, *Structure of Rings*, American Mathematical Society, Vol XXXVII, 1968.

Nathan Jacobson, *Basic Algebra II*, W.H. Freeman and Company, New York, 1989.

T.Y. Lam, *Lectures on modules and rings*, Graduate texts in Mathematics, Springer, 1999.

J. Lambek, *Lectures on rings and modules*, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y, 1976.

Bo Stenström, *Rings of quotients. An Introduction to Methods of Ring Theory*, Springer-Verlag, 1975.

P. Ribenboim, *Rings and modules*, Interscience Publishers , New York, N.Y, 1969.

L.H. Rowen, *Ring Theory I*, Accademic Press, Inc., New York, N.Y, 1988.

R. Wisbauer, *Free modules and Algebras: Bimodules Structure and Group Actions*, Longman, 1996.

TEMA 9.
P.I–ANILLOS.

Identidades polinómicas.

Comenzamos la lección introduciendo el concepto de identidad polinómica: dado un anillo R, diremos que $p \in \mathbb{Z} < X_1, \ldots, X_n >$, el anillo libre generado por $\{X_1, \ldots, X_n\}$, es una identidad polinómica para R si para cualquier homomorfismo de anillos $\Phi : \mathbb{Z} < X_1, \ldots, X_n > \to R$, se verifica que $\Phi(p) = 0$. A groso modo esto quiere decir que siempre que se sustituyan n elementos de R en p da cero. Se define un P.I–anillo como aquél que verifica una identidad polinómica mónica.

Como ejemplos de P.I–anillos tenemos:

- Los anillos conmutativos; verifican la identidad estándar S_2.
- Las álgebras de dimensión finita; si es de dimensión n verifica la identidad estándar S_{n+1}.
- Los anillos que son finitamente generado como módulos sobre su centro. Un caso particularmente importante de este tipo son los anillo de matrices sobre anillos conmutativos.
- Los anillos nil de índice de nilpotencia acotado; si n es el índice de nilpotencia, el anillo verifica X^n.
- Las álgebras algebraicas de grado acotado; si n es una cota del grado, verifica la identidad $S_n([X,Y],[X^2,Y],\ldots,[X^n,Y])$.

Demostramos que la clase de los P.I–anillos es cerrada para subanillos, imágenes homomórficas (por tanto cocientes) y sumas directas finitas.

Introducimos el concepto de identidad polinómica multilineal y demostramos que si R verifica una identidad polinómica (mónica) de grado n, entonces verifica una identidad polinómica (mónica) multilineal de grado n.

Estudiamos los anillos de matrices, demostrando que si R es un anillo unitario, $\mathcal{M}_n(R)$, no verifica ninguna identidad polinómica de grado menor de $2n$. Con este resultado obtenemos una primera aproximación al Teorema de Kaplansky: si R es un P.I–anillo primitivo que verifica una identidad polinómica de grado d, entonces existen un anillo de división Δ y un natural n, con $n \leq \frac{d}{2}$, tales que $R \cong \mathcal{M}_n(\Delta)$. Por tanto, un P.I–anillo primitivo es simple y artiniano.

Álgebras centrales simples. Teorema de Kaplansky.

Comenzamos estudiando los anillos $R := \mathcal{M}_n(\Delta)$, en donde Δ es un anillo de división. Demostramos que si H es un subcuerpo maximal de Δ, $S = R \otimes_{Z(R)} H$ es un anillo simple y primitivo. Es más, si V un un R-módulo simple y fiel, V

puede ser dotado de estructura de S-módulo simple y fiel con $End(_S V) = H$. Por último demostramos que si V tiene dimensión finita sobre H, $S \cong \mathcal{M}_m(H)$ en donde $dim_H \Delta = dim_{Z(R)} H = m/n$ y $dim_{Z(R)} R = m^2$.

Si aplicamos este resultado a un P.I–anillo primitivo, que ya sabemos que es de la forma $\mathcal{M}_n(\Delta)$, con Δ un anillo de división, por el resultado anterior $S := R \otimes H$ vuelve a ser un P.I–anillo primitivo (al ser R un P.I–anillo, R verifica una identidad polinómica multilineal, y toda identidad polinómica multilineal de R lo es de S). Por tanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $S \cong \mathcal{M}_m(H)$, en donde $dim_H \Delta = dim_{Z(R)} H = m/n$ y $dim_{Z(R)} R = m^2$, lo que demuestra el Teorema de Kaplansky: todo P.I–anillo primitivo es simple de dimensión finita sobre su centro.

La conjetura de Göthe.

Al igual que los anillos conmutativos o las álgebras de dimensión finita (más aun, las álgebras artinianas) los P.I–anillos verifican la conjetura de Göthe, esto es: un P.I–anillos sin ideales nil no nulos no contienen ideales por la izquierda (resp. por la derecha) nil no nulos. Es más, demostramos que un P.I–anillo es semiprimo si y sólo si no contiene ideales por la izquierda (resp. por la derecha) nil no nulos.

Comprobamos que el anillo de polinomios con coeficientes en un anillo sin ideales por la izquierda nil es semiprimitivo. Este es el primer paso para sumergir un P.I–anillo semiprimo en un anillo de matrices sobre un producto de cuerpos: si R es un P.I.–anillo semiprimo, tenemos que $R[X]$ es un P.I–anillo semiprimitivo. Éste a su vez es producto subdirecto de anillos P.I–anillos primitivos, cada uno de los cuales se puede ver como subanillo de un anillo de matrices sobre un cuerpo. Por último, como cada uno de estos anillos de matrices tienen su índice acotado por el grado de la identidad polinómica que verifica R tenemos que podemos ver este producto subdirecto como subanillo de un anillo de matrices, de índice menor que el grado de la identidad polinómica que verifica R, sobre el producto de todos estos cuerpos. Es más, si R es un P.I–anillo primo, R es subanillo de un anillo de matrices sobre un cuerpo. Obtenemos entonces que un P.I–anillo semiprimo es Dedekind-finitos y verifica S_n para algún $n \in \mathbb{N}$. Otro resultado interesante que se obtiene de lo anterior, y del que se habló en el tema 5, es que todo anillo de división de dimensión finita sobre su centro es subanillo de un anillo de matrices sobre un cuerpo.

Polinomios centrales. El Teorema de Posner.

Introducimos el concepto de identidad central y demostramos, haciendo uso de los polinomios de Capelli, que $\mathcal{M}_n(A)$, en donde A es un anillo conmutativo, verifica una identidad central de grado $2n^2 + 1$.

Gracias al resultado anterior obtenemos que el centro de un P.I–anillo semiprimo es no nulo.

Por último demostramos que si R es un P.I–anillo primo, R es de Goldie. Como además, por el resultado anterior, todo ideal por la izquierda esencial de R corta de forma no trivial a $Z(R)$ se tiene que R es un orden central en un anillo de matrices sobre un anillo de división, éste de dimensión finita sobre su centro (Teorema de Posner).

Referencias

E-A. Behrens, *Ring Theory*, Academic Press, New York, N.Y, 1972.

P.M. Cohn, *Algebra (II)*, John Wiley& Sons, 1977.

J.C. McConnell. J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, John Wiley& Sons, 1987.

Nathan Jacobson, *Structure of Rings*, American Mathematical Society, Vol XXXVII, 1968.

L.H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*, Accademic Press, Inc., New York, N.Y, 1980.

Vesselin Drensky, *Free Algebras and P.I–Algebras*, Springer-Verlag, 1999.

TEMA 10.
CATEGORÍAS. TEORÍA DE MORITA.

Categorías.

Comenzamos recordando la noción de categoría y dando algunos ejemplos: **Set**; la categoría de los conjuntos, **Grp**; la categoría de los grupos, **Ring**; la categoría de los anillos, **Top**; la categoría de los espacios topológicos, **R-Mod**; la categoría de los R-módulos por la izquierda, **Mod-**R; la categoría de los R-módulos por la derecha. En ejercicios se verán ejemplos de categorías mas abstractas como pueden ser la asociada a un monoide o a un conjunto preordenado.

Definimos los conceptos de subcategoría, subcategoría plena, producto directo de categorías y categoría opuesta, lo que permite, que entre otras cosas, construir nuevas categorías a partir de las ya conocidas.

Se introduce a continuación la noción de funtor, tanto covariante como contravariante. Como ejemplos damos, entre otros, el funtor inclusión, el funtor olvido y el funtor proyección.

Definimos la noción de trasformación natural: dados $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos funtores diremos que μ de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ es una trasformación natural si para cada objeto $A \in \mathcal{C}$ existe un morfismo $\mu_A \in Hom_{\mathcal{D}}(FA, GA)$ tal que para cada par de objetos, $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ y cada morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \qquad & \begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\mu_A} & GA \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ FB & \xrightarrow[\mu_B]{} & GB \end{array} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

es conmutativo. Si además, para todo $A \in Ob(\mathcal{C})$, μ_A es un isomorfismo diremos que μ es un isomorfismo natural y que los funtores $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son isomorfos. Como ejemplo de trasformación natural se considera en la categoría de los R-módulos por la izquierda el funtor identidad y el funtor doble dual. Se tiene entonces que la aplicación que a cada R-módulo por la izquierda M le asocia la aplicación $\mu_M : M \to M^{**}$ definida por $\mu_M(m)(f) = (m)f$ es una aplicación natural. Sí vemos este mismo funtor en la categoría de los espacios vectoriales de dimensión finita tenemos un primer ejemplo de isomorfismo natural. Por último comprobamos que la composición de transformaciones naturales es una transformación natural.

Definimos categorías isomorfas así como categorías equivalentes: dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son isomorfas (resp. equivalentes) si existen dos funtores $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$

tales que $\mathcal{FG} = Id_{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{GF} = Id_{\mathcal{D}}$ (resp. $\mathcal{FG}$ es isomorfo a $Id_{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{GF}$ es isomorfo a $Id_{\mathcal{D}}$). Como ejemplo demostramos que la categoría de los $\mathbb{Z}$-módulos es isomorfa a la de los grupos abelianos y que dado un anillo unitario R la categoría de R-módulos por la izquierda y la de $\mathcal{M}_n(R)$-módulos por la izquierda son equivalentes.

Contextos de Morita.

Comenzamos la sección definiendo el concepto de contexto de Morita: un contexto de Morita es una sexta-upla $(R, R', M, M', \tau, \mu)$ en donde R, R' son dos anillos, M es un R-R'-bimódulo, M' es un R'-R-bimódulo, τ es un R-R-homomorfismo de $M \otimes M'$ en R y μ es un R'-R'-homomorfismo de $M' \otimes M$ en R' tales que se verifica las siguientes igualdades:

(1) $\mu(x', x)y' = x'\tau(x, y')$.
(2) $x\mu(x', y) = \tau(x, x')y$.

Dado ${}_RM$ un R-módulo por la izquierda tenemos el contexto de Morita definido por M: $(R, R' = End_R(M), {}_{R'} M_R, {}_R Hom_R(M, R)_{R'}, \tau, \mu)$.

Asociamos a cada contexto de Morita un anillo $\mathcal{T} := \begin{pmatrix} R & M \\ M' & R' \end{pmatrix}$, en donde la suma es por componentes y el producto viene determinado por la siguiente regla:

$$\begin{pmatrix} r & m \\ m' & r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & n \\ n' & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rs + \tau(m, n') & rn + ms' \\ m's + r'n' & \mu(m', n) + r's' \end{pmatrix}$$

Definimos a continuación la traza de un R-módulo, denotándola por $T(M)$ y demostramos que es un ideal de R. Estamos entonces en condiciones de definir módulo progenerador, esto es, un módulo que es proyectivo, finitamente generado y su ideal traza es todo el anillo.

Demostramos el Teorema de Morita I: sea $(R, R', {}_R M_{R'}, {}_{R'} M'_R, \tau, \mu)$ un contexto de morita con τ y μ sobreyectivas, entonces

(1) ${}_RM$, $M_{R'}$, ${}_{R'}M'$ y M'_R son módulos progeneradores.
(2) τ y μ son isomorfismos.
(3) ${}_{R'}M'_R$ es isomorfo, como bimódulo, a $Hom(M_{R'}, R'_{R'})$. Es más, la aplicación que a cada $m' \in M'$ lo manda a $l_{m'}$ en donde para cada $m \in M$, $l_{m'}(m) := \mu(m', m)$ es un isomorfismo de R'-R-bimódulo. De manera similar ${}_RM_{R'}$ es isomorfo, como bimódulo, a $Hom({}_RM', {}_RR)$.
(4) R es isomorfo, como anillo, a $End(M_{R'})$. Es más, la aplicación que a cada $r \in R$ lo manda a $\lambda(r)$ en donde para cada $m \in M$, $\lambda(r)(m) = rm$ es un isomorfismos de anillos. Similarmente R' es isomorfo a $End({}_RM', {}_RR)$.
(5) El par de funtores $- \otimes M'$, $M \otimes -$ define una equivalencia entre la categoría de R'-módulos por la derecha y la categoría de R-módulos por la derecha. De forma similar $- \otimes M$, $M' \otimes -$ define una equivalencia entre la categoría de R'-módulos por la izquierda y la categoría de R-módulos por la izquierda.
(6) El retículo de los ideales por la izquierda de R es isomorfo al retículo de los submódulos de ${}_{R'}M'$. Es más, el retículo de los ideales de R es isomorfo al retículo de los subbimódulo de ${}_{R'}M'$. Enunciados similares se tienen para los ideales por la derecha de R, los ideales por la izquierda de R' y los ideales

por la derecha de R'. Como consecuencia el retículo de los ideales de R es isomorfo al retículo de los ideales de R'.

(7) Los centros de R y R' son isomorfos.

Como ejemplo, si partimos de un R-módulo progenerador P el contexto de Morita $(R, R' = End_R(P),\ {}_{R'}P_R, {}_R Hom_R(P, R)_{R'}, \tau, \mu)$ verifica el Teorema de Morita I, ya que μ es sobreyectiva porque $T(P) = R$ y τ es sobreyectivo porque P es proyectivo y por tanto podemos aplicar el teorema de la base dual.

El Teorema de Wedderburn y Artin.

Sea R un anillo simple e I un ideal por la izquierda minimal de R. Entonces I considerado como R-módulo por la izquierda es progenerador y por tanto el contexto de morita $(R, R' = End_R(I),\ {}_{R'}I_R, {}_R Hom_R(I, R)_{R'}\tau, \mu)$ verifica el Teorema de Morita I. Es más, R' es un anillo de división, $Hom({}_RI, R_{R'})$ es un R'-módulo finitamente generado sobre R' y $R \cong End(Hom({}_RI, R_{R'}))$, es el anillo de endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión finita.

Más Teoría de Morita.

Dado un R-módulo progenerador P, comprovamos que el funtor $Hom(P_{R'}, —\ )$ es equivalente a $—\otimes_{R'} P'$ y el funtor $Hom(P'_R, —\ )$ es equivalente a $—\otimes_R P$.

Demostramos el Teorema de Morita II: sean R y R' dos anillos tales que R-Mod y R'-Mod son categorías equivalentes, entonces

(1) Existe P un R-módulo progenerador tal que $(R, R' = End_R(P),\ {}_{R'}P_R, {}_R Hom_R(P, R)_{R'}, \tau, \mu)$, es un contexto de Morita con τ y μ sobreyectivos. Por tanto R' es isomorfo a $End({}_RP)$ y R es isomorfo a $End(P'_R)$.

(2) Se (F, G) es una equivalencia entra las categorías de R-mod y R'-Mod, entonces F es isomorfo a $—\otimes_R P$ y G es isomorfo a $—\otimes'_R P'$.

Como consecuencia de este teorema obtenemos que dados dos anillo R y R', las categorías de R-Mod y R'-Mod son equivalentes si y sólo si las categorías de Mod-R y Mod-R' son equivalentes. Es más, conseguimos una estrecha relación entre dos anillos R y R' con categorías de módulos equivalentes: R y R' son dos anillos Morita equivalentes si y sólo si existen $n \in \mathbb{N}$ y un idempotente pleno $e \in \mathcal{M}_n(R)$ tales que $R \cong \rceil M_n(R)e$.

Estos resultados permiten trasladar de forma fácil propiedades del anillo R al anillo R', así: el carácter simple y semisimple, el carácter primo y semiprimo, el ser no singular por la izquierda, el tener dimensión uniforme por la izquierda finita, el carácter primitivo, o el ser regular von Neumann son propiedades que se trasladan entre anillos Morita equivalentes.

Para concluir definimos cuando un R-R'-bimódulo P es inversible y demostramos el Teorema de Morita III: sean R, R', R'', ... anillos de Morita equivalentes, entonces la aplicación que a cada R-R'-bimódulo inversible P le hace corresponder $—\otimes_{R'} P$ es un isomorfismo entre la clase de isomorfismos de R-R'-bimódulo inversible y la clase de isomorfismos naturales de funtores que dan equivalencia entre las categorías de Mod-R y Mod-R'. Es más, la composición de equivalencias da lugar a producto tensoriales de módulos inversibles.

Referencias

P.M. Cohn, *Algebra (II)*, John Wiley& Sons, 1977.

P.M. Cohn, *And Introduction to Ring Theory*, Springer-Verlag. New York, 2000.

T.W.Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag. New York, 1974.

Nathan Jacobson, *Structure of Rings*, American Mathematical Society, Vol XXXVII, 1968.

Nathan Jacobson, *Basic Algebra II*, W.H. Freeman and Company, New York., 1989.

T.Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Graduate texts in Mathematics, Springer, 1991.

J. Lambek, *Lectures on rings and modules*, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1976.

P. Ribenboim, *Rings and modules*, Interscience Publishers , New York, N.Y., 1969.

L.H. Rowen, *Ring Theory I*, Accademic Press, Inc., New York, N.Y., 1988.

Bibliografía

M.F. Atiyah. I.G. Macdonald., *Introducción al álgebra conmutativa*, Ed. Reverté, 1980.

A.J. Berrick. M.E. Keating, *An Introduction to Rings and Modules with K.Theory in View*, Cambridge University Press, 2000.

T. S. Blyth, *Modules Theory. An approach to linear algebra*, American Mathematical Society, 1968.

E-A. Behrens, *Ring Theory*, Academic Press, New York, 1972.

P.M. Cohn, *Algebra (II)*, John Wiley& Sons, 1977.

P, Cohn, *Universal algebras*, D.Reidel Pul. Co, 1981.

P.M. Cohn, *An Introduction to Ring Theory*, Springer-Verlag. New York, 2000.

J.C. McConnell. J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, John Wiley& Sons, 1987.

K.R. Goodearl, *Ring Theory. Nonsingular Rings and Modules.*, Pure and Applied Matrhematics, 1976.

T.W.Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag. New York, 1974.

N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, Van Nostrand Reinhold Company, 1953.

N. Jacobson, *Structure of Rings*, American Mathematical Society, Vol XXXVII, 1968.

N. Jacobson, *Basic Algebra I*, W.H. Freeman and Company, New York, 1985.

N. Jacobson, *Basic Algebra II*, W.H. Freeman and Company, New York, 1989.

T.Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Graduate texts in Mathematics, Springer, 1991.

T.Y. Lam, *Lectures on modules and rings*, Graduate texts in Mathematics, Springer, 1999.

J. Lambek, *Lectures on rings and modules*, Chelsea Publishing Company, New York, 1976.

S. Montgomery, L.Small, *Noncommutative Rings*, Springer-Verlag, 1991.

M. Petrich, *Rings and Semigroups*, Springer-Verlag, 1974.

Bo Stenström, *Rings of quotients. An Introduction to Methods of Ring Theory*, Springer-Verlag, 1975.

P. Ribenboim, *Rings and modules*, Interscience Publishers , New York, 1969.

L.H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*, Accademic Press, Inc., New York, 1980.

L.H. Rowen, *Ring Theory I*, Accademic Press, Inc., New York, 1988.

L.H. Rowen, *Ring Theory II*, Accademic Press, Inc., New York, 1988.

Vesselin Drensky, *Free Algebras and P.I. Algebras*, Springer-Verlag, 1999.

B.L. Van Der Waerdemn, *A History Of Algebra*, Springer-Verlag, 1985.

R. Wisbauer, *Free modules and Algebras: Bimodules Structure and Group Actions*, Longman, 1996.

K.A. Zhevlakov. A.M.Slin'ko. I.P. Shestakov. A.I. Shirshov, *Rings That Are Nearly Associative*, Academic Press, 1982.