

Introducción a la Relatividad Especial.

Manuel Gutiérrez
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Universidad de Málaga

Marzo 2010

La Relatividad Especial es una teoría que se ocupa principalmente de la mecánica, esto es, del movimiento de los cuerpos y de la manera en que lo describimos.

Para entender su construcción conviene hacer previamente una pequeña exposición de la mecánica de Newton. La razón es que de entrada, la Relatividad puede parecer un sistema poco intuitivo, un artificio matemático para explicar algunos experimentos sofisticados mientras parece que fracasa en la explicación de los más obvios e intuitivos. La mecánica de Newton por su parte es muy intuitiva y explica bien todo lo cotidiano, sin embargo no explica un fenómeno importante: la constancia de la velocidad de la luz en el vacío. Su valor $c = 300,000 \frac{km}{sg}$ se conocía con suficiente precisión desde que se midió en 1675, cuando se estudiaba la aberración astronómica. La constancia de la velocidad de la luz es incompatible con la mecánica de Newton, y los esfuerzos de los físicos por interpretar los experimentos fracasaron, lo que precipitó una crisis de la física a finales del siglo XIX y principios del XX, hasta que Albert Einstein encontró una salida.

Lo que propuso Einstein fue asumir este comportamiento de la luz y analizar sus consecuencias, dando lugar a una revisión de las concepciones de la mecánica de Newton. El resultado fue el nacimiento de la Relatividad Especial, cuyas explicaciones y predicciones se han mostrado hasta la fecha muy satisfactorias a pesar de la aparición de fenómenos extraños como la dilatación del tiempo o la contracción del espacio, que no observamos en la vida cotidiana. En realidad lo que ocurre es que a velocidades bajas la Relatividad Especial es casi idéntica a la mecánica de Newton, y en nuestra vida diaria sólo vemos velocidades bajas, lo que explica porqué no se manifiestan esos fenómenos. Se suele decir que nuestra intuición es Newtoniana. Pero en los experimentos que se hacen en física de partículas, donde abundan las velocidades relativistas, se observan continuamente dichos fenómenos.

En matemáticas y en física se usan sistemas de referencia para describir las posiciones de los objetos que se estudian, como por ejemplo, la trayectoria de un vehículo o la de un proyectil en función del tiempo.

Es habitual elegir un sistema de referencia apropiado al problema que se desea estudiar. Para estudiar los cuerpos en el espacio, se utiliza \mathbb{R}^3 con su estructura afín y se describen sus coordenadas con ayuda de las referencias afines $R = \{o; e_1, e_2, e_3\}$ siendo o un punto fijo de \mathbb{R}^3 y $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 . Se incluye la métrica euclídea que nos permite asignar longitudes y ángulos, y habitualmente se considera la base anterior ortonormal, lo que permite simplificar cálculos y argumentos. Se puede elegir la referencia no necesariamente adaptada al problema concreto, esto no supone ningún cambio en los objetos del estudio, si no en las ecuaciones matemáticas que los describen, introduciendo complicaciones innecesarias en los cálculos. Conceptualmente la situación física que se describe es idéntica sea cual sea la referencia que se utilice. Se dice que el espacio es **espacialmente homogéneo e isótropo**. Esto quiere decir que se puede realizar el mismo experimento físico en cualquier parte, orientado en cualquier dirección y siempre dará el mismo resultado. También se puede realizar en cualquier instante de tiempo con el mismo resultado, lo que se conoce

como que el espacio es **temporalmente homogéneo**.

En muchas situaciones se adopta un nuevo punto de vista para describir el movimiento de los objetos; los sistemas de referencia afín se mueven. Por ejemplo, para describir la trayectoria de los planetas se puede tomar un sistema fijo respecto al sol o a la tierra, pero en ambos casos son sistemas en movimiento. De hecho no es fácil pensar en un sistema de referencia verdaderamente fijo.

Es este nuevo punto de vista el que desencadena el principio de relatividad.

Newton situaba la referencia R de modo que el centro de masas del sistema solar estuviera en reposo respecto a él, y observó que no hay ningún experimento mecánico para distinguirlo del resto de las referencias con movimientos relativos uniformes. Por decirlo de una manera simplificada, con la misma suavidad se eleva el humo de un cigarrillo en una habitación tranquila que en la bodega de un barco avanzando sobre las aguas tranquilas de un lago, y nadie podría descubrir en cuál de los dos entornos se encuentra, observando sólo el movimiento de partículas en el interior.

Este resultado impresionó a Galileo y a Newton, y fué elevada a la categoría de principio, lo que significó el final del espacio absoluto.

Principio de relatividad de Galileo (o de Newton). Las leyes de la mecánica son las mismas en todos los sistemas de referencia con movimientos relativos uniformes.

Como consecuencia no hay reposo absoluto, sólo es medible el movimiento relativo.

La mecánica de Newton se desarrolla en el espacio afín anterior donde se supone que hay un tiempo absoluto con el que están de acuerdo todos los observadores del modelo.

El movimiento de los cuerpos se rige por las tres **leyes de Newton**:

1. En ausencia de fuerzas, una partícula se mueve en línea recta con velocidad constante.
2. La aceleración \vec{a} de una partícula se relaciona con la fuerza que la provoca por la ecuación $\vec{F} = m\vec{a}$ siendo m la masa de la partícula.
3. Cada acción tiene una reacción igual y de sentido opuesto.

Estas leyes necesitan algunas precisiones como por ejemplo qué significa la fuerza sobre una partícula o qué es la masa. Estas son cuestiones en general delicadas. Por ejemplo, en la práctica parece que todo está bajo los efectos de la fuerza de la gravedad, por lo que la primera ley habría que interpretarla en un sentido muy simplificado. En cuanto a la masa, todos tenemos una idea intuitiva de lo que significa, pero de momento no hay ninguna definición completamente satisfactoria.

Por otra parte, la declaración de la primera ley se debe hacer respecto a algún sistema de referencia si queremos dar precisión a su significado.

Llamemos $R = \{o; e_1, e_2, e_3\}$ un sistema de referencia ortonormal (orientada positivamente). El sistema de referencia mide el tiempo universal con su propio reloj, de manera que en principio el origen y los vectores de la base dependen

del tiempo t , algo que expresaremos escribiendo $R(t)$ en lugar de R . Cuando $R(t)$ va a hacer una observación, puede poner el cronómetro en marcha, lo que significa que puede poner el origen de tiempos en el momento que quiera. La trayectoria de una partícula en dicha referencia tiene componentes en función del tiempo $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3$, y su velocidad y aceleración serán respectivamente $x'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t))$, $x''(t) = (x''_1(t), x''_2(t), x''_3(t))$. Una partícula libre de fuerzas se llama **partícula inercial**. La primera ley de Newton nos dice que una partícula inercial α tiene trayectoria dada por una línea recta a velocidad constante. Supongamos que la referencia $R(t)$ es una en la que toda partícula inercial se observa con una trayectoria recta y con velocidad constante. La ecuación que describe la partícula en $R(t)$ es $x(t) = tv + b$ siendo $v, b \in \mathbb{R}^3$ vectores fijos. Los vectores de la base de $R(t)$, no dependen de t , es decir, la referencia se puede escribir $R(t) = \{o(t); e_1, e_2, e_3\}$, pues si la base está girando, hay partículas inerciales que no se ven como líneas rectas.

Sea $S(t) = \{p(t); u_1(t), u_2(t), u_3(t)\}$ otro sistema de referencia ortonormal (orientado positivamente) en movimiento respecto de $R(t)$. Las componentes de la partícula inercial anterior en esta referencia se escribirán $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ y se relacionan con la anterior por

$$y(t) = H(t)x(t) + T(t) \quad (1)$$

siendo $H(t) \in SO(3, \mathbb{R})$ una matriz que representa una rotación y $T(t) \in \mathbb{R}^3$ representa una traslación entre ambos sistemas.

Derivando dos veces encontramos la relación entre las componentes de la aceleración medidas en cada sistema de referencia

$$y'' = H''x + 2H'x' + Hx'' + T'' \quad (2)$$

Queremos saber si existe algún otro sistema de referencia $S(t)$ que ve a **toda** partícula inercial como lo hace $R(t)$, es decir, con trayectoria rectilínea y velocidad uniforme. Es claro que $y''(t) = 0$ si y sólo si $H'(t) = 0$ y $T''(t) = 0$. En efecto, puesto que H y T son datos que dependen únicamente de los sistemas R y S , deben ser los mismos para todas las partículas, así que tomando varios tipos de partículas inerciales, la ecuación anterior queda

1. Si $x(t) = 0$, es decir, $\alpha(t) = o$ el origen del sistema inercial $R(t)$, entonces $y''(t) = T''(t)$
2. Si $x(t) = b \in \mathbb{R}^3$, entonces $y''(t) = H''(t)b + T''$
3. Si $x(t) = tv$ con $v \in \mathbb{R}^3$, entonces $y'' = H''tv + 2H'v + T''$

Luego $S(t)$ ve a toda partícula inercial, en particular las tres anteriores, con $y''(t) = 0$ si y sólo si $H'(t) = 0$ y $T''(t) = 0$, o en otras palabras, cuando $S(t)$ no rota ni acelera respecto de $R(t)$. Puesto que sistemas de este tipo abundan, se tiene la siguiente forma alternativa de la primera ley de Newton:

Ley de inercia. Existe una familia de sistemas de referencia, llamados **referencias inerciales**, en los que las partículas inerciales se ven como rectas recorridas a velocidad constante.

Dos referencias inerciales R y S tienen sus coordenadas relacionadas por la ecuación con $H'(t) = 0$ y $T''(t) = 0$.

Recíprocamente, si R y S tienen sus coordenadas relacionadas por la ecuación con $H'(t) = 0$ y $T''(t) = 0$, y uno es inercial, entonces el otro también lo es.

Ejercicio 1 ()** *Probar que si R y S tienen sus coordenadas relacionadas por*

$$y(t) = H(t)x(t) + T(t)$$

con $H'(t) = 0$ y $T''(t) = 0$, y uno es inercial, entonces el otro también lo es.

El modelo se completa con otras hipótesis importantes como que la masa de una partícula es la misma para todos los sistemas inerciales, y puesto que la aceleración también lo es, la fuerza que actúa sobre la partícula también es la misma para todos los sistemas inerciales. Por otra parte, en la física antes de Newton, la velocidad de la luz se creía que era infinita, pero pronto, en 1675, algunas observaciones astronómicas sobre la aberración estelar pusieron de manifiesto que era finita, e incluso se estimó en $300,000 \frac{Km}{sg}$ en el vacío, aproximadamente. Más tarde la teoría de Maxwell describió con mucha elegancia los fenómenos electromagnéticos y de ella se dedujo, de manera independiente, que la velocidad de la luz en el vacío era precisamente el valor observado. Sin embargo, nada impide que haya otras partículas con velocidades arbitrariamente grandes.