Tema 1. Sección 1.
Diagramas espacio-tiempo.

Manuel Gutiérrez.
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología.
Universidad de Málaga. 29071-Málaga. Spain.
Marzo de 2010.

En la mecánica es usual incluir en los diagramas el eje temporal (que dibujaremos como el eje vertical) para obtener la gráfica de los cuerpos en movimiento en función del tiempo. Tales diagramas, que ahora tendrán dimensión 4, representan el **espacio-tiempo** y sus puntos se llaman **sucesos.** Las referencias inerciales deben tener un vector más en su base para dar cuenta de la dirección del eje temporal. Un objeto en reposo estará representado por una línea recta paralela al eje temporal, lo que indica que el cuerpo evoluciona en el tiempo, pero no en el espacio. El origen de una referencia inercial, evolucionando en función del tiempo, sigue la línea marcada por su eje temporal que se puede considerar como la trayectoria en el espacio-tiempo de un **observador inercial** con capacidad para dar coordenadas a todos los sucesos del espacio tiempo. Dicha trayectoria se llama **línea de universo** del observador.

La manera en que un sistema inercial asigna coordenadas a un suceso p es mediante las componentes del vector $\overrightarrow{op}$ en la base de la referencia inercial, es decir, mediante líneas paralelas desde p a los ejes coordenados (Figura 1).

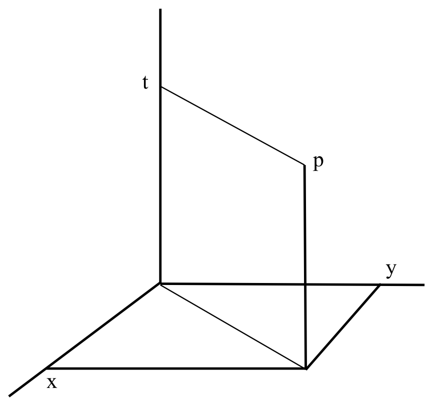


Figura 1. Coordenadas de un punto

En particular los sucesos que ocurren en el instante $t = 1$ para $R(t) = \{o(t), e_0, e_1, e_2, e_3\}$ son los que están sobre el hiperplano horizontal a altura 1, que a su vez está marcado por el extremo del vector e_0.

Si tenemos otra referencia inercial $S(t) = \{o(t), u_0, u_1, u_2, u_3\}$ con el reloj sincronizado con $R(t)$, ambos están de acuerdo en el hiperplano horizontal de sucesos que ocurren en el instante $t = 1$, lo que significa que dicho hiperplano también está marcado por el extremo del vector u_0. En otras palabras, la primera componente del vector u_0 en la referencia inercial $R(t)$ debe ser 1, (Ver figura 2).

Pero este argumento es simétrico respecto a las referencias inerciales empleadas, y de hecho es válido para cualesquiera otro par de referencias inerciales. Esto significa que:

> La existencia de un tiempo absoluto equivale a que la primera componente del primer vector de una referencia inercial en cualquier otra referencia inercial, sea uno.

Si $\pi_R : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la proyección sobre las tres coordenadas espaciales en la referencia $R(t)$, las coordenadas de una partícula $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ en la referencia $R(t)$ se puede escribir $x(t) = (t, \pi_R\alpha(t))$ y la segunda componente, $\pi_R\alpha(t)$, se llama la **trayectoria espacial** de α en $R(t)$. Se dice que $R(t)$ es una referencia inercial cuando para cualquier partícula inercial α, su trayectoria espacial $\pi_R\alpha(t)$ es una línea recta con velocidad constante.

Con el paso de tres dimensiones a cuatro se ha pagado un precio en una cuestión de elegancia. En $\mathbb{R}^3$ las referencias estaban formadas por un punto y una base que se tomaba siempre ortonormal. Al pasar a $\mathbb{R}^4$ añadimos un vector para describir el eje temporal pero no podemos elegirlo arbitrariamente, es el vector director de la línea de universo del observador, y en general los cuatro vectores de la referencia no forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$. Esto se pone de manifiesto pensando en dos observadores inerciales que se cruzan, ya que en el punto de cruce los otros tres vectores de la base generan un subespacio de dimensión tres que es el mismo para ambas referencias.

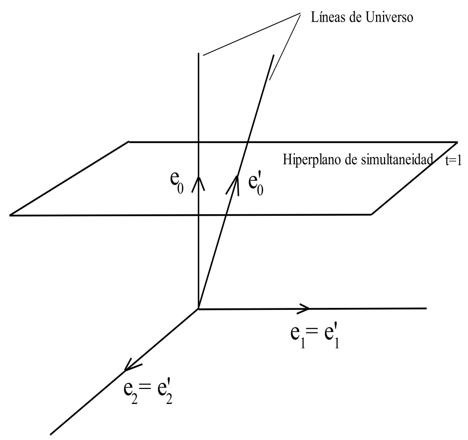


Figura 2.

Definición 1 *Se dice que dos sistemas inerciales $R(t) = \{o(t); e_0, e_1, e_2, e_3\}$ y $S(t) = \{p(t); u_0, u_1, u_2, u_3\}$ están en* ***posición estandar con velocidad relativa*** *$v \in \mathbb{R}$, cuando verifican*

1. $o(0) = p(0)$.

2. $e_i = u_i$ para $i = 1, 2, 3$.

3. $S(t)$ se desplaza espacialmente a lo largo del eje positivo de $R(t)$ generado por e_1 con velocidad $v \in \mathbb{R}$.

Transformaciones de Galileo.

A pesar de que todos los observadores (aunque no sean inerciales) están de acuerdo en el tiempo, cada cual tiene libertad de fijar el origen, lo que quiere decir que el acuerdo con la coordenada temporal puede considerarse salvo traslaciones. Aunque no es muy relevante, conviene mantener esta libertad para obtener las expresiones más generales posibles de cambio de coordenadas. Sean $R(t)$ y $S(s)$ dos referencias inerciales relacionadas por $H \in SO(3,\mathbb{R})$ y $T(t) \in \mathbb{R}^3$ con $H' = 0$ y $T'' = 0$ para todo t. Supongamos que tienen origen de tiempos distintos, por ejemplo $t = s + c_0$ siendo t y s el tiempo que miden R y S respectivamente. Las referencias inerciales escritas en $\mathbb{R}^4$ son, $R(t) = \{o(t), e_0, e_1, e_2, e_3\}$ y $S(s) = \{p(s), u_0, u_1, u_2, u_3\}$ siendo e_0 y u_0 los vectores que generan los correspondientes ejes temporales. Así, un suceso en $\mathbb{R}^4$ tiene coordenadas (t, x_1, x_2, x_3) en $R(t)$ y (s, y_1, y_2, y_3) en $S(s)$ que están relacionadas por

$$\begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & h_{11} & & \\ v_2 & & \ddots & \\ v_3 & & & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde $H = (h_{ij}) \in SO(3,\mathbb{R})$ matriz constante y $T(t) = vt + a = vs + c$, (usando $t = s + c_0$) con $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $c = (c_1, c_2, c_3)$ fijos. Esto se puede interpretar como una aplicación biyectiva $G : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que transforma las coordenadas respecto de $S(t)$ de cualquier suceso en sus coordenadas respecto de $R(t)$. Se llaman **transformaciones de Galileo** y tienen una estructura de grupo llamado **Grupo de Galileo**.

Un cambio de coordenadas del tipo (1) puede interpretarse equivalentemente como una transformación entre sistemas de referencia afín, esto es, una relación entre los orígenes junto con un cambio entre sus bases. Llamando $A = (a_{ij})$ a la matriz de orden 4 de la ecuación anterior, entonces R ve el origen de S moverse mediante $p(t)_R = Ap(s)_S + c$, es decir

$$\begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & h_{11} & & \\ v_2 & & \ddots & \\ v_3 & & & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + c_0 \\ v_1 s + c_1 \\ v_2 s + c_2 \\ v_3 s + c_3 \end{pmatrix}$$

y los vectores de ambas referencias se relacionan por

$$u_i = \sum_{j=0}^{3} a_{ji} e_j, \;\; i =, 0, 1, 2, 3.$$

Con esta segunda interpretación, dada una referencia inercial, cualquier otra se obtiene de ella por una transformación de Galileo, y recíprocamente, toda tranformación de Galileo transforma referencias inerciales en referencias inerciales. En otras palabras, las referencias inerciales están parametrizadas por el grupo de Galileo.

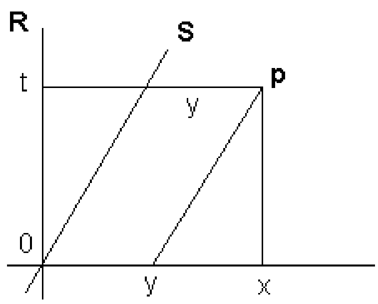
Si dos sistemas inerciales $R(t) = \{o(t), e_0, e_1, e_2, e_3\}$ y $S(s) = \{p(s), u_{0,}u_1, u_2, u_3\}$ están en posición estandar con velocidad relativa $v \in \mathbb{R}$, entre los dos sistemas se tiene $s = t$, $H = Id \in SO(3, \mathbb{R})$ y $T(t) = tve_1 \in \mathbb{R}^3$ y por tanto la transformación de Galileo que lleva las coordenadas de S a las de R será

$$\begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Ley de adicción de velocidades.

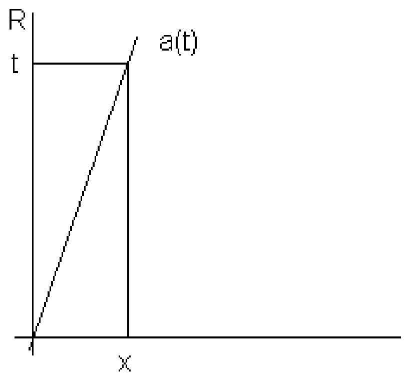
Vimos que la manera en que un sistema inercial asigna coordenadas a un suceso p es mediante las componentes del vector $\overrightarrow{op}$ en la base de la referencia inercial, es decir, mediante líneas paralelas desde p a los ejes coordenados.

Si R y S están en posición estandar, estarán en todo momento de acuerdo en la coordenada temporal de un suceso, pero no en la coordenada espacial debido a que S se ha desplazado alejándose de R.



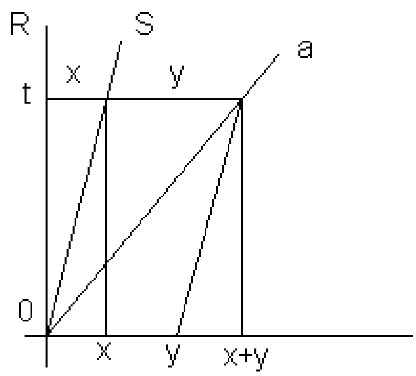
En el gráfico anterior el suceso p tiene coordenadas (t, x) en R y (t, y) en S.

El sistema inercial R mide la velocidad de una partícula dividiendo el espacio que recorre por el tiempo empleado, $u = \frac{x}{t}$.



Si S es otro sistema inercial en posición estandar con R que se desplaza con velocidad relativa v_1, y α es una partícula inercial que se desplaza en la misma dirección que S y lleva velocidad v_2 respecto de S, entonces la velocidad de α medida por R es

$$w = \frac{x+y}{t} = \frac{x}{t} + \frac{y}{t} = v_1 + v_2.$$



Esto es, la velocidad con la que R mide la velocidad de la partícula es la suma de las velocidades. Se llama **ley de adicción de velocidades de la mecánica de Newton**.

Utilizando las transformaciones de Galileo (1) se puede hacer el mismo cálculo. Aunque es un cálculo trivial, lo haremos para ver cómo se manejan las transformaciones. Sea R, S y Q tres sistemas inerciales en posición estandar, de forma que Q representa a la partícula α. En el instante t, las coordenadas de α en el sistema Q son $(t, 0, 0, 0)$, por tanto sus coordenadas en S están dadas por

$$\begin{pmatrix} t \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ tv_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y en R por

$$\begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ tv_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t(v_1 + v_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde se deduce el resultado.