Tema 1. Sección 2.
Incompatibilidad de la mecánica de Newton con el electromagnetismo.

Manuel Gutiérrez.

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología.

Universidad de Málaga. 29071-Málaga. Spain.

Abril de 2010.

Pensando en el principio de relatividad como un principio que debe tener un cierto significado universal, debería poder extenderse a las leyes de la Física y no sólo a las de la mecánica. Sin embargo las ecuaciones del electromagnetismo son incompatibles con las transformaciones de Galileo.

El electromagnetismo, establecido por J. C. Maxwell en 1864, se rige por las ecuaciones de Maxwell que codifican cómo, en el vacío, las cargas eléctricas en movimiento generan un campo eléctrico $E : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que depende del tiempo y de las coordenadas espaciales, y otro magnético $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, y también cómo evoluciona en el espacio una carga eléctrica en presencia de los campos E y B.

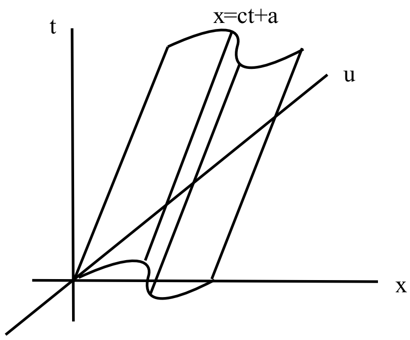
De dichas ecuaciones destacamos que cada una de las componentes de E y de B en cualquier referencia inercial satisface la ecuación de ondas

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$$

siendo c una constante independiente del sistema de referencia, que se obtiene de otras constantes fundamentales del electromagnetismo, y cuyo valor es aproximadamente $300{,}000\frac{km}{sg}$. Se interpreta como la velocidad de la luz en el vacío. Para verlo, basta analizar la ecuación en una dimensión espacial

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

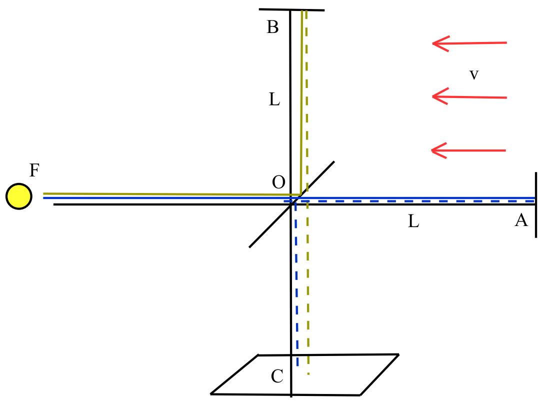
Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con derivada segunda contínua, y definimos $h(t, x) = x - ct$, entonces la función $u(t, x) = f \circ h(t, x)$ es una solución de la ecuación. La función f representa la forma de una onda y la función u resulta ser la onda anterior desplazándose por el eje x a velocidad c. En efecto, nótese que la función u es constante a lo largo cada línea recta $x = ct + a$. Esta onda en movimiento representa una partícula luz y por eso a la constante c se le llama **velocidad de la luz en el vacío**.



Hay un hecho relevante nuevo, y es que la velocidad de la luz además de ser finita, es constante y además la misma constante en todos los sistemas inerciales, violando la ley de adicción de velocidades de la mecánica de Newton.

El descubrimiento de la naturaleza ondular de la luz hizo que, como toda teoría ondulatoria, se pensara en el fluido "éter"sobre el que la luz se propaga. Se propuso que la ecuación de ondas sólo es válida en una familia de referencias inerciales en reposo respecto al "éter", a pesar de que este argumento va en contra de la universalidad del principio de relatividad.

Michelson y Morley hicieron un experimento en 1887 para determinar la velocidad de la tierra con respecto al éter pues se pensaba que en algún momento tendrían velocidades relativas muy distintas en su movimiento orbital, de lo contrario el éter estaría siguiendo a la tierra, algo que nadie estaba dispuesto a admitir. Pero la
ninguna diferenc

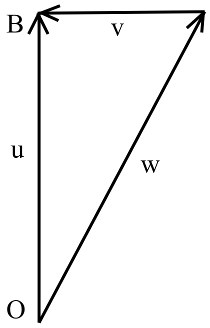


El experimento consistía en lo siguiente. En un dispositivo con dos brazos perpendiculares de longitud L se pone una fuente de luz monocromática a la izquierda, y un semiespejo en el origen O inclinado 45^o. Se supone inicialmente que el éter se desplaza de derecha a izquierda paralelo al eje horizontal con velocidad v. Una parte de los rayos de luz siguen el trayecto desde la fuente

$FOAOC$, mientras que otra parte sigue el trayecto $FOBOC$, para llegar a la cámara de fotos en C.

Un rayo de luz desde A hasta O emplea un tiempo $t_1 = \frac{L}{c-v}$ y desde O hasta A emplea otro tiempo $t_2 = \frac{L}{c+v}$. En total el tiempo que tarda en ir y volver por el brazo A es $T = t_1 + t_2 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2cL}{c^2-v^2} = \frac{2L}{c}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1}$.

La velocidad u de otro rayo de luz que va de O a B se descompone en una velocidad w de norma c más l
pensar como un barco que va
éter) y cruza un rio perpendic



Por tanto el tiempo que tarda en ir de O a B es $s_1 = \frac{L}{(c^2-v^2)^{\frac{1}{2}}}$. Como la situación es simétrica para el trayecto de B a O, el tiempo que tarda en la vuelta es $s_2 = \frac{L}{(c^2-v^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{L}{c(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}$, y el tiempo total empleado en la ida y vuelta es $S = s_1 + s_2 = \frac{2L}{c}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$. Si hacemos el cociente, se tiene

$$\frac{T}{S} = \frac{\frac{2L}{c}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1}}{\frac{2L}{c}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}} = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} > 1.$$

Esta diferencia de tiempos se traduce en que los rayos llegan a la cámara de fotos con un desfase en sus longitudes de ondas. El aparato tiene suspendidos sus brazos en una piscina de mercurio, con lo que se puede repetir el experimento intercambiando los papeles de los brazos A y B. Michelson y Morley habían calculado que la diferencia de los patrones de las longitudes de ondas en las dos posiciones inicial y final sería medible en la cámara fotográfica.

Sin embargo no se observó ninguna diferencia.

Entre los intentos de explicar el experimento de Michelson-Morley manteniendo la idea de éter el más importante es el propuesto por Fitzgerald en 1892. Según él, todo cuerpo moviéndose por el éter con velocidad v se contrae con un factor $(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}$ sólo en la dirección del movimiento relativo con el éter. Así, en el experimento de Michelson-Morley, la barra A se acorta en ese factor, y por tanto el tiempo total de un rayo de luz en ir y volver por él es

$$T = \frac{2L}{c}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} = \frac{2L}{c}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$$

de modo que

$$\frac{T}{S} = \frac{\frac{2L}{c}(1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}}{\frac{2L}{c}(1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}} = 1$$

lo que explicaría el resultado del experimento.

En 1895 H. A. Lorentz presentó una teoría de la materia según la cual la materia está compuesta de cargas eléctricas que generan campos electromagnéticos. Según él, estos campos sufren el efecto de su paso por el éter de tal forma que ocurre la contracción propuesta por Fitzgerald. Esta idea fué apoyada por Poincaré, pero surgía un nuevo problema: Si las longitudes dependen de la velocidad relativa con el éter y éste es indetectable, qué sentido tiene medir longitudes.

Estaba claro que la ecuación de ondas no podía ser la misma en todas las referencias inerciales tal como se entiende en la mecánica de Newton, o dicho de otra forma, no es invariante por el grupo de Galileo. Trabajando con una dimensión espacial, si $R(t)$ y $S(s)$ son dos referencia inerciales en posición estandar con velocidad relativa v sabemos que sus coordenadas se relacionan por la transformación de Galileo $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix}$$

es decir, $G(s, y) = (s, vs + y)$.

Si la función $u(t, x) = f(x-ct)$ es una solución de la ecuación de ondas en la referencia R, en la otra referencia S la función se escribe $w(s, y) = u \circ G(s, y) = f((v - c)s + y)$, y derivando se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= f' \cdot (v-c) \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= f' \\ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} &= f'' \cdot (v-c)^2 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= f'' \end{aligned}$$

de modo que

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f'' \cdot \left(-\frac{(v-c)^2}{c^2} + 1\right)$$

y por tanto no satisface la ecuación en general.

Lorentz estaba interesado en encontrar unas transformaciones lineales distintas de las de Galileo que dejaran invariante a la ecuación de ondas. Si se modifica la transformación de Galileo por $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c^2} \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix}$$

siendo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, esto es, $L(s,y) = \left(\gamma\left(s + \frac{v}{c^2}y\right), \gamma(vs+y)\right)$, entonces $w(s,y) = u \circ L(s,y) = f\left(\gamma\left(v-c\right)s + \gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)y\right)$, y derivando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial s} &= f' \cdot \gamma(v-c) \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= f' \cdot \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right) \\
\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} &= f'' \cdot \gamma^2(v-c)^2 \\
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= f'' \cdot \gamma^2\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2
\end{aligned}$$

luego

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{1}{c^2}f'' \cdot \gamma^2(v-c)^2 + f'' \cdot \gamma^2\left(\frac{c-v}{c}\right)^2 = 0$$

por tanto es de nuevo una solución de la ecuación. Es importante resaltar que a Lorentz esto le pareció un truco matemático sin ningún sentido físico pues obsérvese que la transformación no es de Galileo, en particular $t = \gamma(s + \frac{v}{c^2}y)$ no respeta el tiempo absoluto.

Las transformaciones anteriores se llaman **transformaciones de Lorentz** y forman un grupo llamado **Grupo de Lorentz**.

La situación se resume en que no se podía mantener la universalidad del principio de relatividad para todas las leyes de la Física, junto con la invariancia de las leyes de la mecánica por el grupo de Galileo (que significa que dichas leyes son las mismas en todas las referencias inerciales) y la invariancia del electromagnetismo por el grupo de Lorentz (que significa que sus leyes son las mismas en una familia extraña de sistemas de referencia que no tienen sentido físico).

Einstein confiaba plenamente en el electromagnetismo de Maxwell al que consideraba extremadamente elegante. Además creía que la introducción del éter estropeaba la teoría. Por otra parte pensaba que debía mantenerse la universalidad del principio de relatividad, de modo que se propuso revisar los fundamentos de la mecánica de Newton dando procedimientos operativos para aclarar el proceso de medir, y para ello respetó los siguientes principios.

1. **Principio de relatividad**. Las leyes de la Física son las mismas en todas las referencias inerciales.

2. **Constancia de la velocidad de la luz**. La luz sigue una trayectoria recta con velocidad constante y finita c en cualquier referencia inercial.

Con la primera hipótesis eleva la relatividad de Galileo a la categoría de principio universal pues sustituye las leyes de la Mecánica por las de la Física. Con la segunda rechaza la existencia del éter y otorga validez a las ecuaciones de Maxwell en todas las referencias inerciales.

Con todo esto, Einstein construye la relatividad especial obteniendo que la noción de simultaneidad es relativa y que el grupo que relaciona las referencias inerciales no es el de Galileo sino el de Lorentz, concluyendo ahora que ambas teorías son invariantes por el mismo grupo.

Aunque aparentemente esto destruye la mecánica de Newton, en realidad las diferencias sólo se manifiestan a velocidades comparables a la de la luz. En cambio, cuando los cuerpos que observamos se mueven con velocidades bajas, como ocurre en la vida cotidiana, se reproduce muy aproximadamente la mecánica de Newton, lo que explica porqué nuestra intuición es más próxima a las ideas de Newton.

Por otra parte, Minkowski (que fué profesor de Einstein) observó que, normalizando a $c = 1$, el grupo de Lorentz actúa sobre $\mathbb{R}^4$ como el grupo de las isometrías lineales de la métrica cuya matriz en la base canónica es

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Siguiendo las ideas de Felix Klein, este grupo da lugar a la **Geometría de Lorentz**, cuyo objeto fundamental es la métrica anterior llamada **métrica de Minkowski**.

Con esto se logró geometrizar la relatividad especial permitiendo adoptar nuevos puntos de vista. Por ejemplo, ahora las referencias inerciales están formadas por un punto y una base ortonormal para la métrica de Minkowski, recuperando la elegancia perdida al pasar de tres a cuatro dimensiones con la mecánica de Newton. Pero más importante aún es que esto supuso el primer paso para incorporar la gravitación en un esquema necesariamente más amplio donde la geometría diferencial acabaría adquiriendo el protagonismo, en especial el análisis tensorial en variedades y la teoría de conexiones.