Manuel Gutiérrez
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Universidad de Málaga

February 26, 2009

# 1 El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

La estructura de espacio vectorial es posiblemente la estructura más versátil y utilizada en la ciencia. Es usual tener un ejemplo de referencia a partir del cual se van dando definiciones más abstractas y propiedades. En este caso nuestro modelo será $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Formalmente, se define

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) \ / \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, ...n\}$$

como el conjunto formado por todas las n-uplas de números reales ordenados. Sus elementos se pueden sumar componente a componente, y también se pueden multiplicar por un número real, multiplicando cada componente por dicho número.

La primera operación se llama **ley de composición interna** y se define como

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ ((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) &\mapsto (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) \end{aligned}$$

donde $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$.

Propiedades.

1. Asociativa. Para cada $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $(u + v) + w = u + (v + w)$.
2. Elemento neutro. Existe un elemento $e \in \mathbb{R}^n$ tal que para cada $u \in \mathbb{R}^n$, $e + u = u + e = e$.

   En efecto, $e = (0, ..., 0)$, y se denotará por 0.
3. Inverso. Dado $u \in \mathbb{R}^n$, existe un $v \in \mathbb{R}^n$, tal que $u + v = v + u = 0$.

   En nuestro caso, $v = -u$ y se llama el opuesto de $u$.
4. Conmutativa. Para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u + v = v + u$.

Cualquier conjunto con las propiedades 1,2 y 3 se llama **grupo**, y si además tiene la propiedad 4 se llama **grupo abeliano o conmutativo**.

La segunda operación se llama **ley de composición externa** y se define como

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\lambda, (x_1, ..., x_n)) & \mapsto & \lambda(x_1, ..., x_n) \end{array}$$

donde $\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

Propiedades.

1. Distributivas. Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y cada $u, v \in \mathbb{R}^n$,

   (a) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$

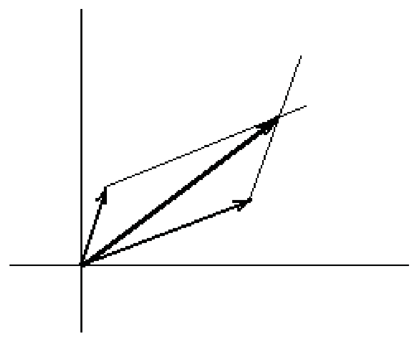
   (b) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

2. $1u = u$

3. Seudoasociativa. Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y cada $u \in \mathbb{R}^n$

   $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ se llaman **vectores** y los de $\mathbb{R}$ **escalares**. La tripleta $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ formada por $\mathbb{R}^n$ con la suma de vectores y el producto por escalares se llama **espacio vectorial**. El nombre de los elementos de $\mathbb{R}^n$ proviene de su representación gráfica. Por ejemplo, $\mathbb{R}^2$ se representa como un plano con dos ejes perpendiculares que se cruzan en el 0 que se llamará **origen**, y si $u \in \mathbb{R}^2$, $u = (x_1, x_2)$, se representa como el vector que tiene origen en 0 y final en el punto de $\mathbb{R}^2$ de coordenadas $(x_1, x_2)$. La suma de vectores está dada por la regla del paralelogramo.



**Definición 1** *Una* ***combinación lineal*** *de vectores es cualquier suma finita del tipo*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k.$$

Si un vector $u$ se puede expresar como $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$ se dice que $u$ es combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_k$. Si todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ pueden expresarse como combinación lineal de ellos, se dice que $(v_1, v_2, ..., v_k)$ es un **sistema generador**. De entre los sistemas generadores interesan los que estén formados por el mínimo número de elementos, para ello se introduce la siguiente noción.

**Definición 2** *El sistema $(v_1, v_2, ..., v_k)$ se dice que es **linealmente independiente** cuando la única combinación lineal que es cero es la que tiene todos sus coeficientes cero, es decir*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0.$$

Un sistema de vectores que es generador y linealmente independiente se llama **base**. Por ejemplo, el sistema $(e_1, e_2, ..., e_n)$, formado por los vectores

$$e_i = (0, ..., \overset{i)}{1}, ..., 0)$$

es una base. En efecto, si $u = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} u &= (x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, 0, ..., 0) + (0, x_2, ..., 0) + ... + (0, 0, ..., x_n) \\ &= x_1(1, 0, ..., 0) + x_2(0, 1, ..., 0) + ... + x_n(0, ..., 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... x_n e_n \end{aligned}$$

lo que prueba que genera todo $\mathbb{R}^n$. Para ver que son linealmente independientes, si $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = 0$, entonces

$$\begin{aligned} (0, 0, ..., 0) &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n \\ &= \lambda_1(1, 0, ..., 0) + \lambda_2(0, 1, ..., 0) + ... + \lambda_n(0, ..., 1) \\ &= (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \end{aligned}$$

luego $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. La base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ se llama **base canónica**. Se prueba que todas las bases tienen el mismo número de vectores, y ese número común se llama **dimensión** del espacio $\mathbb{R}^n$. Por tanto la dimensión de $\mathbb{R}^n$ es $n$.

Una base siempre se considera como un sistema ordenado de vectores, de modo que cambiando dos vectores entre sí da lugar a otra base distinta.

Si $B = (v_1, ..., v_n)$ es una base de $\mathbb{R}^n$, y $u$ es un vector cualquiera, entonces $u = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$. A la n-upla $(x_1, ..., x_n)$ se le llama **componentes de** $u$ **en la base** $B$.

**Ejercicio 20** *Probar que $(1, 0, -1)$, $(0, 2, 1)$ y $(1, 1, 2)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.*

**Ejercicio 21** *Probar que la expresión de un vector en una base es única.*

**Definición 3** *Una **aplicación lineal** de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que respeta las combinaciones lineales de vectores, es decir,*

$$f(\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_k u_k) = \lambda_1 f(u_1) + .. + \lambda_k f(u_k).$$

*Un **isomorfismo** es una aplicación lineal que además es una biyección.*

**Ejercicio 22** *Probar que un isomorfismo lleva una base en otra base. Por tanto los isomorfismos sólo se pueden definir en espacios vectoriales de igual dimensión.*

**Ejercicio 23 (*)** *Probar que toda base se puede interpretar como un isomorfismo que lleva dicha base a la base canónica.*

**Ejercicio 24** *Probar que una aplicación lineal queda determinada conociendo las imágenes de los vectores de una base.*

**Ejercicio 25** *Probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal y además es inyectiva o sobreyectiva, entonces es biyectiva.*

## 1.1 Subespacios vectoriales.

**Definición 4** *Un subconjunto no vacío $S$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se dice que es un **subespacio** cuando contiene todas las combinaciones lineales que se pueden formar con miembros de $S$.*

Consecuencias inmediatas.

1. El conjunto $\{0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
2. Todo subespacio de $\mathbb{R}^n$ contiene al elemento 0.
3. Si $B = (v_1, ..., v_k)$ es un conjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces la familia $L(v_1, ..., v_k)$ formada por todas las combinaciones lineales de elementos de $B$ es un subespacio vectorial generado por $B$.
4. Todo subespacio admite una base, esto es, un sistema generador formado por vectores linealmente independientes.
5. El número de vectores de una base de un subespacio es fijo, y se llama **dimensión del subespacio**. Por convenio se establece que la dimensión del subespacio $\{0\}$ es cero.
6. Si $S_1$, $S_2$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$ con $S_1 \subset S_2$ y $\dim S_1 = \dim S_2$, entonces $S_1 = S_2$.

Dados dos subespacios, $S_1$, $S_2$ con bases $B_1$ y $B_2$ respectivamente, la suma de $S_1$ y $S_2$ es el subespacio generado por $B_1 \cup B_2$

$$S_1 + S_2 = L(B_1 \cup B_2).$$

**Ejercicio 26** *Probar que $S_1 + S_2 = \{u + v \ / \ u \in S_1, \ v \in S_2\}$.*

**Ejercicio 27** *Probar que $S_1 + S_2$ es el menor subespacio que contiene a $S_1$ y a $S_2$.*

**Ejercicio 28** *Probar que $S_1 \cap S_2$ es el mayor subespacio que está contenido a la vez en $S_1$ y en $S_2$.*

Las dimensiones de estos subespacios están relacionadas por la **fórmula de Grassmann**

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

Si se tiene $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^n$, y $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, entonces se dice que $\mathbb{R}^n$ es suma directa de $S_1$ y $S_2$, y se denota $\mathbb{R}^n = S_1 \oplus S_2$.