# Tema 2. Sección 2.
# El grupo de Lorentz.

Manuel Gutiérrez.
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología.
Universidad de Málaga. 29071-Málaga. Spain.
Mayo de 2010.

Una **isometría** es un isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que preserva la métrica, esto es, una aplicación biyectiva y lineal con la propiedad

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle \, .$$

Es inmediato ver que el conjunto de todas las isometrías del espacio de Minkowski tiene estructura de grupo y recibe el nombre de **grupo de Lorentz**. Si se considera el espacio de Minkowski con su estructura de espacio afín, entonces las traslaciones también preservan la métrica y junto con las isometrías lineales forman el **grupo de Poincaré**.

Es claro que una isometría transforma una base ortonormal en otra base ortonormal. Esto también se puede interpretar diciendo que una isometría provoca un tipo especial de cambio lineal de coordenadas, y de hecho fue así como las introdujo H. Lorentz en su intento por encontrar una transformación de coordenadas que respetara la ecuación de ondas, por eso se llaman clásicamente **transformaciones de Lorentz**. A los elementos del grupo de Poincaré se les llama **transformaciones de Poincaré**.

Fijada la base canónica $E$, cada isomorfismo se corresponde biunívocamente con una matriz regular. Así que el grupo de Lorentz se corresponde con un grupo matricial que se denota $O_1(4)$ donde el subíndice hace referencia al número de $-1$ que aparece en la diagonal de $\eta$.

La condición de preservar la métrica se puede escribir matricialmente

$$u^t A^t \eta A v = u^t \eta v$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}^4$, siendo $A$ la matriz asociada a $f$ en la base canónica. Por tanto el grupo de Lorentz es

$$O_1(4) = \{A \in GL(4, \mathbb{R}) \ / \ A^t \eta A = \eta\}.$$

Nótese que si se toma determinantes, una transformación de Lorentz verifica

$$|A| = \pm 1$$

por lo que el grupo de Lorentz tiene al menos dos componentes conexas. Las transformaciones de Lorentz que tienen determinante 1 se llaman **propias** forman un subgrupo llamado **grupo propio de Lorentz**

$$SO_1(4) = \{A \in O_1(4) \ / \ |A| = 1\}.$$

En realidad este subgrupo tiene a su vez dos componentes conexas; el formado por las que preservan los conos futuro, llamadas **ortócronas**, y las que no. Las primeras forman otro subgrupo que es la componente conexa de la identidad de $O_1(4)$, llamado **grupo propio ortócrono de Lorentz** $SO_1^+(4)$, así que en total el grupo de Lorentz tiene cuatro componentes conexas que se denotan $SO_1^+(4)$, $SO_1^-(4)$, $O_1^+(4)$, $O_1^-(4)$.

El estudio de la relatividad especial se verá simplificando con la utilización de un tipo especial de elementos de $O_1(4)$.

**Definición 1** *Una transformación de Lorentz $f$ propia y ortócrona se llama* boost *cuando existe una base ortonormal $B = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ con $u_0$ temporal tal que $f(u_2) = u_2$, y $f(u_3) = u_3$.*

La matriz de $f$ en la base $B$ será

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En efecto, las dos últimas columnas son las componentes de $f(u_2)$ y $f(u_3)$ en la base $B$. Por otra parte si

$$f(u_0) = a_{00}u_0 + a_{10}u_1 + a_{20}u_2 + a_{30}u_3$$

se tiene por ser $f$ isometría

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_2, u_0 \rangle = \langle f(u_2), f(u_0) \rangle \\ &= < u_2, a_{00}u_0 + a_{10}u_1 + a_{20}u_2 + a_{30}u_3 > = a_{20}. \end{aligned}$$

Análogamente se puede obtener $a_{30} = a_{21} = a_{31} = 0$.

Cosideremos ahora la caja superior de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Podemos calcular su inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{01} \\ -a_{10} & a_{00} \end{pmatrix}.$$

Como $f$ es propia, $|A| = 1$ y se tiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{01} \\ -a_{10} & a_{00} \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, partiendo de la relación $A^t \eta A = \eta$ se tiene

$$A^{-1} = \eta A^t \eta,$$

luego

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{00} & -a_{10} \\ -a_{01} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Identificando,

$$a_{00} = a_{11}$$
$$a_{01} = a_{10}$$

$$a_{00}^2 - a_{01}^2 = 1.$$

Además $f$ es ortócrona, es decir, $u_0$ y $f(u_0)$ están en el mismo cono de luz, por tanto

$$-a_{00} = \langle u_0, f(u_0)\rangle < 0$$

luego existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$a_{00} = Ch\alpha$$
$$a_{01} = Sh\alpha$$

de modo que

$$A = \begin{pmatrix} Ch\alpha & Sh\alpha \\ Sh\alpha & Ch\alpha \end{pmatrix}$$

Nótese que también se podría haber tomado $-\alpha$. El ángulo $\alpha$ se llama **ángulo hiperbólico entre** $u_0$ **y** $f(u_0)$.

**Teorema 2** *Cada transformación de Lorentz propia y ortócrona factoriza de forma única como la composición de un boost y una rotación euclídea.*

**Dem.** Llamemos $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a la transformación de Lorentz. Sea $u_0$ un vector temporal unitario futuro y $v_0 = f(u_0)$ que también será temporal unitario y futuro. Vamos a construir un boost que lleve $u_0$ a $v_0$.

Si fuera $u_0 = v_0$ entonces el boost buscado sería la identidad, así que supondremos que $u_0 \neq v_0$. Tomamos $u_1 \in L(u_0, v_0) \cap u_0^{\perp}$ y $w_1 \in L(u_0, v_0) \cap v_0^{\perp}$ unitarios tales que $\{u_0, u_1\}$ y $\{v_0, w_1\}$ tienen la misma orientación. Podemos ampliar estos dos sistemas ortonormales a dos bases ortonormales de $\mathbb{R}^4$, $A = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ y $B = \{v_0, w_1, u_2, u_3\}$ con la misma orientación. La aplicación lineal $b : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que lleva la base $A$ a la base $B$ es una transformación de Lorentz, pues lleva bases ortonormales a bases ortonormales. Tiene determinante 1 pues conserva la orientación de las bases, y es ortócrona pues lleva un vector temporal futuro (por tanto todos) en otro temporal futuro. Puesto que $b(u_i) = u_i$ para $i = 2, 3$, la aplicación $b$ es un boost que lleva $u_0$ a $v_0$.

Volviendo a la transformación $f$, sabemos que lleva la base $A$ a otra base ortonormal con la misma orientación $V = (v_0, v_1, v_2, v_3)$. Hemos encontrado un boost que lleva $A$ a la base $B$. Podemos dar ahora una aplicación lineal $g$ que lleva $B$ en $V$. Esta transformación deja fijo a $v_0$ y puesto que $v_0^{\perp}$ es un espacio euclídeo y ambas bases tienen la misma orientación que $A$, se trata de una rotación euclídea. Así $f = g \circ b$.

Además la factorización es única. En principio llegamos a otro boost $b'$ si en lugar de elegir $u_1$ tomamos su opuesto $-u_1$. Al elegir $w_1$ tenemos que tomar su opuesto $-w_1$ para que $\{u_0, u_1\}$ y $\{v_0, w_1\}$ tengan la misma orientación. Por otra parte, al extenderlas a bases de $\mathbb{R}^4$ se tiene que el nuevo boost debe verificar $b'_{|L(u_0,v_0)^\perp} = id$, $b'(u_0) = v_0$ y $b'(-u_1) = -w_1$, por tanto $b' = b$. ■

Puesto que las posibles transformaciones de $SO_1^+(4)$ lleva $u_0$ a todos los vectores $v_0$ del hiperboloide $-1 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, que tiene dimensión 3, se tiene que topológicamente $SO_1^+(4) \simeq \mathbb{R}^3 \times SO(3)$.

## Ejercicios.

**Ejercicio 1** *Probar que el conjunto de todas las transformaciones de Lorentz tiene estructura de grupo.*

**Ejercicio 2** *Probar que una transformación de Lorentz es ortócrona si y sólo si* $a_{00} > 0$.

**Ejercicio 3** *Probar que si* $A \in SO_1^-(2)$, *entonces*

$$A = \begin{pmatrix} -Ch\alpha & -Sh\alpha \\ -Sh\alpha & -Ch\alpha \end{pmatrix}$$

*si* $A \in O_1^+(2)$

$$A = \begin{pmatrix} Ch\alpha & Sh\alpha \\ -Sh\alpha & -Ch\alpha \end{pmatrix}$$

*y finalmente si* $A \in O_1^-(2)$

$$A = \begin{pmatrix} -Ch\alpha & -Sh\alpha \\ Sh\alpha & Ch\alpha \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 4** *Probar que* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es una isometría para la métrica de Minkowski si y sólo si lleva bases ortonormales en bases ortonormales.*