Tema 2. Sección 3.
Diagramas de Minkowski.

Manuel Gutiérrez.
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología.
Universidad de Málaga. 29071-Málaga. Spain.
Mayo de 2010.

En relatividad especial el espacio ambiente es $\mathbb{R}^4$ con su estructura afín. Un punto de este espacio representa la posición y el instante en que ocurre un suceso.

Como en la mecánica de Newton, necesitamos referencias afines para describir a los observadores, pero las bases asociadas van a ser ortonormales respecto a la métrica de Minkowski.

Los observadores se pueden describir como una familia a un parámetro real de referencias afines $R(t) = \{o(t), e_0, e_1, e_2, e_3\}$ donde $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal para la métrica de Minkowski. Nótese que la diferencia con la versión Newtoniana es que es la base entera la que es ortonormal, y no el sistema formado por los últimos tres vectores.

Los observadores inerciales ocupan el origen de las referencias inerciales y se representan por una línea recta $\alpha(t) = o + tu_0$ siendo u_0 temporal y $o = \alpha(0)$. El espacio vectorial asociado $\mathbb{R}^4$ con su estructura de Minkowski, representa el espacio natural donde medir las velocidades relativas de partículas y observadores. Todo observador inercial puede dar coordenadas al espacio afín $\mathbb{R}^4$ ampliando el vector $\frac{u_0}{|u_0|}$ a una base ortonormal respecto de la métrica de Minkowski $(\frac{u_0}{|u_0|}, u_1, u_2, u_3)$ aunque la manera de hacerlo no es única. Así que hay una correspondencia entre observadores inerciales y referencias inerciales (ortonormales). Esto hace que nos interese conocer bien la noción de ortogonalidad en el espacio de Minkowskowski.

Sea el plano de Minkowski $(\mathbb{R}^2, \eta)$ siendo

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

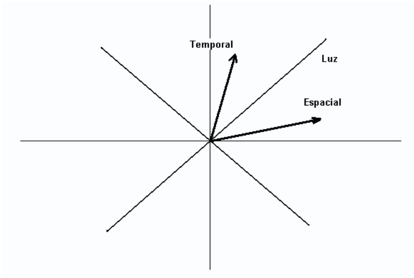
la métrica de Minkowski en la base canónica (e_0, e_1). Vamos a analizar en primer lugar la representación gráfica de los vectores luz. Sea $u = (x, y)$ un vector luz

$$0 = < u, u > = (x, y) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -x^2 + y^2.$$

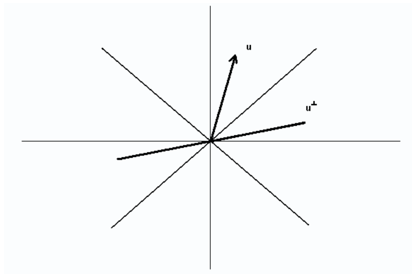
Por tanto los vectores luz ocupan las bisectrices de cada cuadrante. y dividen al espacio en cuatro regiones, los temporales ocupan las regiones superior e inferior y los vectores espaciales ocupan el resto junto con el vector cero.

La ortogonalidad es bastante diferente al caso euclídeo. Sea $u = (a_0, a_1)$ un vector temporal. Un vector (x, y) ortogonal a él verifica

$$0 = -a_0 x + a_1 y$$



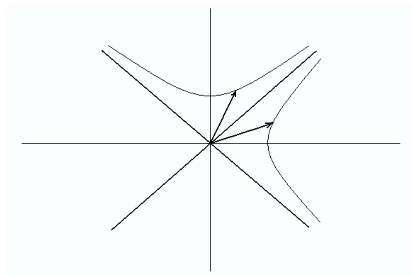
así que el subespacio ortogonal está generado por el vector (a_1, a_0) que es justo la imagen especular del vector u respecto a la bisectriz del primer cuadrante



Podemos ver cómo son las bases ortonormales aplicando un boost a la base canónica

$$\begin{pmatrix} Ch\,\alpha & Sh\,\alpha \\ Sh\,\alpha & Ch\,\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ch\,\alpha \\ Sh\,\alpha \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} Ch\,\alpha & Sh\,\alpha \\ Sh\,\alpha & Ch\,\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sh\,\alpha \\ Ch\,\alpha \end{pmatrix}$$

ambos estarán sobre una rama de una hipérbola



La base canónica dota de un sistema de coordenadas a $\mathbb{R}^2$, en efecto para calcular las coordenadas de un punto p, lo que se hace es ver el punto como el vector desde el origen a p que tendrá en la base canónica las componentes (x, y).

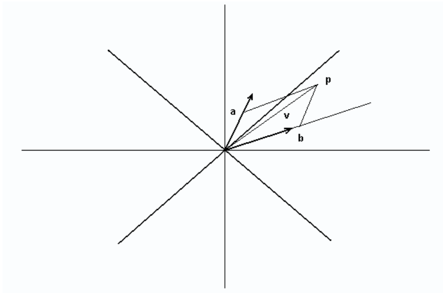
Entonces por definición las coordenadas de p son (x, y). Nótese que el vector (x, y) se escribe

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe_0 + ye_1.$$

De igual manera, si $B = (u_0, u_1)$ es otra base ortonormal, y w cualquier vector de $\mathbb{R}^2$, entonces las coordenadas del punto que representa w en la nueva base B, son (a, b) donde

$$w = au_0 + bu_1.$$

Luego la manera gráfica de asignar coordenadas es trazando desde el punto p sendas paralelas a los vectores de la base como en el caso euclídeo. De hecho, la asignación de coordenadas es una idea de la geometría afín que no depende del producto escalar.



Cuando queremos estudiar fenómenos en los que intervienen dos observadores inerciales, podemos ampliar sus vectores temporales a bases ortonormales de modo que los dos últimos vectores de cada base coincidan. Esto lo vimos en la primera parte de la demostración del teorema anterior, y dada su importancia lo destacaremos como la siguiente proposición.

Proposición 1 *Dos vectores temporales unitarios u_0 y v_0 pueden dar cada uno de ellos coordenadas ampliando a bases ortonormales (u_0, u_1, u_2, u_3) y (v_0, v_1, u_2, u_3) de modo que los dos últimos vectores coincidan. En particular (u_0, u_1) y (v_0, v_1) generan el mismo subespacio de dimensión 2.*

Esta proposición nos permitirá dar una versión relativista de la noción clásica de dos observadores inerciales en posición estandar, lo que nos permite estudiar todos los fenómenos relativistas en el plano de Minkowski en lugar de en dimensión 4. En el siguiente capítulo se verá una justificación física de esta simplificación.

Definición 2 *Dos referencias ortonormales $R(t) = \{o(t); e_0, e_1, e_2, e_3\}$ y $S(s) = \{p(s); u_0, u_1, u_2, u_3\}$ se dice que están en posición estandar con velocidad relativa $v \in \mathbb{R}$ cuando se verifica:*

1. *$o(0) = p(0)$.*
2. *$e_2 = u_2$, $e_3 = u_3$.*

3. *$R(t)$ observa que $S(s)$ se desplaza a lo largo de su eje e_1 en dirección positiva con velocidad constante v.*

Nótese que no podemos decir que e_1 sea igual a u_1 pues son ortogonales a e_0 y u_0 respectivamente.

Proposición 3 *Dos referencias ortonormales con la misma orientación en sus bases están en posición estandar con velocidad relativa $v \in \mathbb{R}$ si y sólo si sus orígenes coinciden en $t = 0$ y sus bases asociadas se obtiene una de la otra mediante un boost cuyo ángulo hiperbólico α verifica $v = Th\,\alpha$.*

Dem. ($\Rightarrow$) Sea $R(t) = \{o(t), e_0, e_1, e_2, e_3\}$ y $S(s) = \{p(s), u_0, u_1, e_2, e_3\}$ dos referencias en posición estandar con velocidad relativa v. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que (e_0, e_1, e_2, e_3) es la base canónica. Puesto que (e_0, e_1) y (u_0, u_1) son ortonormales y tienen la misma orientación con e_0 y u_0 temporales futuros, sabemos que la transformación de Lorentz que lleva una a otra es un boost. Basta analizar ahora su parámetro α. Veamos cómo afecta el boost al vector e_0.

$$\begin{pmatrix} Ch\,\alpha & Sh\,\alpha \\ Sh\,\alpha & Ch\,\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ch\,\alpha \\ Sh\,\alpha \end{pmatrix}.$$

La manera en que $R(t)$ calcula las coordenadas del punto $p(s)$ para $s = 1$, es ver el punto como el vector desde su origen $o(0)$ a $p(1)$ que tendrá en la base canónica las componentes $(Ch\,\alpha, Sh\,\alpha)$. Entonces por definición, lo que $R(t)$ observa es que después de un tiempo $Ch\,\alpha$, el punto $p(1)$ está en la coordenada $Sh\,\alpha$, por tanto la velocidad con la que $R(t)$ observa a $p(s)$ es $v = Th\,\alpha$.

($\Leftarrow$) El argumento anterior sirve para ver que si (e_0, e_1, e_2, e_3) es la base canónica, entonces al aplicarle el boost se obtiene (u_0, u_1, e_2, e_3) base ortonormal con u_0 temporal futuro. Puesto que sus orígenes coinciden para $t = 0$, las referencias inerciales que representan están en posición estandar. Y también que la velocidad relativa es $v = Th\,\alpha$. ∎

Después de este resultado se ve que α es también el ángulo hiperbólico entre $R(t)$ y $S(t)$.