Manuel Gutiérrez
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Universidad de Málaga

November 30, 2005

Matrices.

Una **matriz** $n \times m$ es una tabla formada por n filas y m columnas de números reales ordenados, del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior se representa a veces abreviadamente por (a_{ij}). Si $B = (b_{ij})$ es otra matriz $m \times r$, es decir, el número de columnas de A coincide con el número de filas de B, entonces podemos multiplicarlas en el orden AB de la siguiente manera

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{mn2} & \dots & b_{mr} \end{pmatrix} = (c_{ij})$$

siendo $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$, es decir, el elemento ij-ésimo del producto se obtiene multiplicando la i-ésima fila de A con la j-ésima columna de B componente a componente y sumando.

Nótese que si multiplicamos A por la derecha con el vector $e_i = (0, ..., \overset{i)}{1}, ..., 0)$ de la base canónica de $\mathbb{R}^m$, visto como una columna, se tiene

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

es decir, lo que hace es seleccionar la i-ésima columna de A. Si la multiplicación se hace por la izquierda (considerando ahora e_i vector de $\mathbb{R}^n$, lo que hace es seleccionar la i-ésima fila de A

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & 1 & ... & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{im} \end{pmatrix}$$

Finalmente, si multiplicamos por la izquierda con el i-ésimo vector $e_i \in \mathbb{R}^n$, y por la derecha con el j-ésimo vector $e_j \in \mathbb{R}^m$, lo que se obtiene es el elemento a_{ij} de la matriz A.

Las matrices constituyen una herramienta de primer orden en álgebra lineal. Por ejemplo, fijada una base de $\mathbb{R}^n$ representan biunívocamente a las aplicaciones lineales. En efecto, sea $B = (v_1, v_2, ..., v_n)$ una base. Cada vector $u \in \mathbb{R}^n$ lo representamos como una n-upla formada por sus componentes en la base B, $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Esto significa que

$$u = x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n.$$

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal. Supongamos que las imágenes de los vectores de la base B, expresadas en la propia base B, están dadas por

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i.$$

Las componentes forman una matriz $n \times n$ que llamaremos **matriz de la aplicación f en la base B** y denotaremos $A = (a_{ij})$. Entonces podemos conocer $f(u)$ haciendo

$$\begin{aligned} f(u) &= \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_j a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) v_i \end{aligned}$$

lo que significa que las componentes $(y_1, y_2, ..., y_n)$ de $f(u)$ en la base B estás dadas por por el producto matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Como se puede ver, la matriz de f tiene por j-ésima columnas las componentes de $f(v_j)$ en la base B.

Ejercicio 29 (*) *Fijada una base B, probar que la matriz de la composición de dos aplicaciones lineales en B está dada por el producto de las matrices que representan a dichas aplicaciones.*

Si ahora consideramos que la aplicación f es un isomorfismo, entonces $B' = (f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n))$ es también una base, y podemos considerarlo como un cambio de base. Entonces a la matriz de f en la base B se le llama **matriz del cambio de base de B' a B** porque nos permite calcular las componentes de un vector en la base B a partir de sus componentes en B'. En efecto, supongamos que conocemos la expresión de cada vector de B' en la base B

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i.$$

Si $u \in \mathbb{R}^n$ tiene componentes $(x_1, x_2, ..., x_n)$ en B y $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ en B', entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = u = \sum_{j=1}^{n} x'_j f(v_j) &= \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \\ = \sum_{i,j=1}^{n} x'_j a_{ij} v_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j \right) v_i \end{aligned}$$

Por tanto las relación entre las componentes está dado por el producto matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Esto a veces se expresará de forma más compacta como $x = Ax'$.

En la práctica se suelen dar las dos bases B y B' sin mencionar el isomorfismo que las relaciona, tan sólo se dice que P es la matriz del cambio de base de B a B'. En las cuentas de antes es claro que $P = A^{-1}$ y que $x' = Px$.

Definición 1 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $k \times k$. Se define el **adjunto de elemento** a_{ij} como la matriz A_{ij} de orden $(k-1) \times (k-1)$ formada por la matriz A suprimiendo la fila y la columna que contienen al elemento a_{ij}. El **determinante de** A es el número real $|A|$ definido inductivamente como :*

1. *Si $k = 1$, $|A| = a_{11}$ el único elemento que tiene.*
2. *Si $k > 1$, entonces*

$$|A| = a_{11} |A_{11}| - a_{12} |A_{12}| + ... + (-1)^{1+k} |A_{1k}|.$$

Propiedades inmediatas.

1. $|A| = |A^t|$ donde A^t es la matriz transpuesta de A, es decir, $A^t = (a_{ji})$.
2. Si se cambian dos filas consecutivas de A, el determinante cambia de signo.
3. Si se cambian dos columnas consecutivas de A, el determinante cambia de signo.
4. $|A| \neq 0$ si y sólo si los vectores fila son linealmente independientes.
5. $|A| \neq 0$ si y sólo si los vectores columna son linealmente independientes.
6. Si a un vector fila de A se le suma una combinación lineal del resto de los vectores fila y se dejan las demás filas igual, se obtiene otra matriz con el mismo determinante que A.
7. Si a un vector columna de A se le suma una combinación lineal del resto de los vectores columna y se dejan las demás columnas igual, se obtiene otra matriz con el mismo determinante que A.
8. Si B es otra matriz de igual orden que A, entonces $|AB| = |A|\,|B|$.

Una matriz con determinante no nulo se llama **matriz regular**.