Tema 3. Sección 3.
Referencias inerciales.

Manuel Gutiérrez.
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología.
Universidad de Málaga. 29071-Málaga. Spain.
Mayo de 2010.

Queremos repetir el proceso de dar coordenadas inerciales por parte de cualquier observador inercial arbitrario, o equivalentemente, queremos ver cómo se puede tomar una referencia inercial asociada al observador. Tomamos w' un observador inercial. Puesto que es una partícula inercial, visto desde la referencia inercial $R(t) = \{w(t), e_0, e_1, e_2, e_3\}$ asociada a w, debe tener una trayectoria rectilínea con velocidad constante, es decir, debe ser $w'(s) = o' + scu_0$ para algún vector u_0 que tomaremos temporal y unitario igual que en el caso de w pues queremos que represente un observador que lleva velocidad menor que la de la luz.

Lo primero que se observa es que si se toma una referencia inercial $S(s) = \{w'(s), u_0, u_1, u_2, u_3\}$ asociada a w', la base asociada no depende de s, pues de lo contrario, w' vería alguna partícula inercial con una trayectoria que no sería rectilínea y con velocidad constante.

En efecto, cada uno de ellos tiene la capacidad de dar coordenadas a los puntos del espaciotiempo por el mero hecho de disponer de una referencia afín. Llamemos $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ y $\{y_0, y_1, y_2, y_3\}$ a las coordenadas de R y de S respectivamente. Si llamamos $A(s) = (a_{ij}(s))$ la matriz del cambio de base, las coordenadas se relacionan por $y = Ax$. Las coordenadas de w en R son $(tk, 0, 0, 0)$, de modo que en S será

$$y_i = \sum_{j=0}^{3} a_{ji}(s)x_j = a_{0i}(s)tk,$$

y como S debe ver a w como una recta a velocidad constante, debe ocurrir que a_{0i} no dependa de s. Tomando otras partículas inerciales del tipo $(kt, \varepsilon t, 0, 0)$, $(ct, 0, \varepsilon t, 0)$ o $(ct, 0, 0, \varepsilon t)$ con ε constante menor que c, se ve que las demás columnas de A también debe ser independientes de s.

Si ahora queremos que w' lleve sus medidas de tiempo y espacio a coordenadas inerciales, nótese que la coordenada espacial debe ponerse en un eje que sea el hiperplano de simultaneidad del origen o', es decir, debemos tomar u_1 ortogonal a u_0.

Esto es así por que cuando efectuamos una medida de longitud, implícitamente estamos asumiendo que nos referimos a una distancia entre dos sucesos simultaneos. En particular la distancia de un suceso a un observador, es la distancia entre ese suceso, y el suceso simultaneo con él en la línea de universo del observador. Una vez que sabemos esa distancia, para asignarle unas coordenadas inerciales, se pone el tiempo medido en el eje de tiempo (que es $o' + u_0$ y pasa por o'), y la distancia espacial se pone en el eje coordenado que también pasa por o' y que es precísamente $o' + u_1$ con $u_1 \in u_0^{\perp}$.

Además esto vale en dimensión 4 pues el plano $\pi = span\{u_0, v\}$ es temporal, lo que significa que la métrica de Minkowski restringida a π vuelve a ser una métrica de Minkowski, por tanto se aplica de nuevo el argumento anterior obteniendo que $o' + u_{0|\pi}^{\perp}$ es el hiperplano de simultaneidad de o' en π. Variando A sobre todo $o' + u_0^{\perp}$ se obtiene que todos los sucesos de $o' + u_0^{\perp}$ son simultáneos con $w'(0) = o'$.

En definitiva, los vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ deben tomarse ortogonales a u_0 para la metrica de Minkowski. Ahora es claro que la referencia asociada a w' debe ser $S(s) = \{w'(s), u_0, u_1, u_2, u_3\}$ siendo $\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ una base ortonormal para la métrica de Minkowski. La ortonormalidad de los tres últimos vectores es para comodidad de cálculo, igual que se hizo en la mecánica de Newton. Con esto se tiene que las referencias inerciales en relatividad especial están parametrizadas por el grupo de Lorentz en lugar del grupo de Galileo.

Así que un observador inercial tiene asociada como referencia inercial, una ortonormal y la manera en que asigna coordenadas usando los dos principios de la relatividad especial, coincide con las coordenadas relativas a la referencia ortonormal, salvo por la constante c que sólo afecta a la coordenada temporal.

Podemos arreglar lo de la constante c tomando la primera coordenada como $x_0 = ct$, y entonces ya sí se ve que las coordenadas son las coordenadas de la referencia ortonormal.

Al ver la primera coordenada inercial multiplicada por c, todas las coordenadas son distancias espaciales. Se llaman **coordenadas geométricas**. Es usual tomar $c = 1$ que equivale a tomar la unidad de longitud 300.000 km o 1 **segundo luz**. La unidad de tiempo se toma 1 segundo y se identifica con el segundo luz. Otra unidad usual en Astronomía es el **año luz** tanto para el tiempo como para la longitud, y equivale a la distancia que recorre la luz en 1 año.

Nosotros mantendremos la constante c visible para ver el papel que juega en cada momento.

Así pues nuestro observador inercial $w(t) = o + cte_0$ siendo e_0 un vector temporal unitario, es decir, el vector que determina a un observador inercial debe tener norma c, y su parámetro t será justo el tiempo que mide su reloj que se llama **tiempo propio**.

Esto nos guía para extender la definición al caso general, y así definir el tiempo propio de un observador no necesariamente inercial, es decir, con velocidad menor que la de la luz. Si $\sigma(t)$ es un observador, su parámetro t se llama **tiempo propio** cuando $\langle \sigma'(t), \sigma'(t) \rangle = -c^2$.

Si se aplica un boost f a ce_0, entonces $cu_0 = f(ce_0) = (cCh\alpha, cSh\alpha)$ es otro vector temporal futuro siendo α el ángulo hiperbólico entre ambos. El observador $w(t) = o + tce_0$ ve que el observador asociado a u_0 ha recorrido una distancia $cSh\alpha$ en un tiempo $cCh\alpha$, por tanto le asigna una velocidad de $Th\alpha$. En definitiva al igual que la métrica euclídea mide longitudes y ángulos, la de Minkowski mide velocidades relativas a cada observador, pues las coordenadas se obtienen haciendo $Ch\,\alpha = -\langle u_0, e_0\rangle$ y $Sh\,\alpha = \langle u_0, e_1\rangle$, y son medidas de espacio y tiempo relativas al observador w.

Puesto que las referencias asociadas a dos observadores inerciales w y w' son ortonormales, sus coordenadas se relacionan por una transformación de Lorentz. Vamos a dar una interpretación física de dicha tranformación.

Definición 1 *Dados dos observadores inerciales w y w', se dice que están en* ***posición estandar con velocidad relativa*** $v \in \mathbb{R}$ *cuando sus referencias inerciales* $R(t) = \{w(t); e_0, e_1, e_2, e_3\}$ *y* $S(s) = \{w'(s); u_0, u_1, u_2, u_3\}$ *verifican:*

1. $w(0) = w'(0)$.
2. $e_2 = u_2$, $e_3 = u_3$.
3. *$R(t)$ observa que $S(s)$ se desplaza a lo largo de su eje e_1 en dirección positiva con velocidad constante v.*

Nótese que no podemos decir que e_1 sea igual a u_1 pues son ortogonales a e_0 y u_0 respectivamente.

Consideremos las referencias R y S asociadas a w y w' respectivamente. Sabemos que cada uno de ellos tiene la capacidad de dar coordenadas a los puntos del espaciotiempo. Llamemos $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ y $\{y_0, y_1, y_2, y_3\}$ a las coordenadas de R y de S respectivamente siendo $t = \frac{x_0}{c}$ y $s = \frac{y_0}{c}$. Queremos ver cómo se relacionan ambos grupos de coordenadas. Lorentz fue el primero en encontrar dicha relación a partir del electromagnetismo, quería saber qué transformación lineal de coordenadas dejaba invariante la ecuación de ondas, de ahí que se conozcan como **transformaciones de Lorentz**, pero para él no tenían ningún sentido físico porque no respetaba el carácter absoluto del tiempo. En cambio Einstein sí pensó que se trataban de las transformaciones que relacionaban a las referencias inerciales.

R y S están en posición estandar con velocidad relativa v a lo largo del eje e_1, ya sabemos que en las direcciones ortogonales al movimiento R y S dan las mismas coordenadas a un suceso, de modo que

$$\begin{aligned} x_2 &= y_2 \\ x_3 &= y_3, \end{aligned}$$

y puesto que las dos primeras coordenadas, t y x_1, no pueden depender de las dos últimas x_2 y x_3, entonces sólo dependen de s e y_1. La misma observación sirve para concluir que s e y_1 sólo pueden depender de t y x_1. Puesto que las coordenadas de R y de S están relacionadas por una transformación de Lorentz, podemos escribirla como una transformación lineal general

$$\begin{aligned} t &= a_{00}s + a_{01}y \\ x &= a_{10}s + a_{11}y. \end{aligned} \tag{1}$$

y calcular todos los coeficientes. La relación entre las coordenadas debe verificarse para todos los puntos del espaciotiempo, en particular para todos los

Manuel Gutiérrez. Universidad de Málaga.

puntos de ciertas curvas inerciales. Conocemos explícitamente las expresiones de algunas de ellas en R y S lo que nos ayudará al cálculo.

Haremos los cálculos suponiendo que somos el observador w. Tomamos en primer lugar la línea de universo del propio $w(t)$. Es claro que $x = 0$ independientemente del valor de t y que para S se debe tener $y = -vs$, luego la segunda ecuación queda

$$0 = a_{10}s - a_{11}vs$$

de donde se tiene

$$a_{10} = a_{11}v. \tag{2}$$

Tomamos ahora la curva inercial que representa al otro observador $w'(s)$. Entonces $y = 0$ y $x = vt$, sustituyendo en (1) se tiene

$$\begin{aligned} t &= a_{00}s \\ vt &= a_{10}s. \end{aligned}$$

Pero ya sabemos que $t = \gamma s$, luego de la primera ecuación deducimos que $a_{00} = \gamma$ y de la segunda

$$a_{10} = \gamma v$$

y usando 2, obtenemos $a_{11} = \gamma$, con lo que las ecuaciones (1) quedan

$$\begin{aligned} t &= \gamma s + a_{01}y \\ x &= \gamma(vs + y). \end{aligned}$$

Finalmente tomamos una curva que representa un rayo de luz. En R y en S se verifican las relaciones $x = ct$, $y = cs$ respectivamente. Sustituyendo en las ecuaciones anteriores se tiene

$$\begin{aligned} t &= \gamma s + a_{01}cs \\ ct &= \gamma(v + c)s, \end{aligned}$$

eliminando t se deduce que

$$a_{01} = \frac{v}{c^2}\gamma.$$

Así llegamos a

$$\begin{aligned} t &= \gamma\left(s + \frac{v}{c^2}y\right) \\ x &= \gamma(vs + y) \end{aligned}$$

Matricialmente lo escribimos

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c^2} \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix}.$$

Lo que acabamos de obtener es la relación entre las coordenadas de un mismo suceso en dos referencias inerciales S y S' con velocidad relativa v, respetando los dos principios de Einstein. Es justo la transformación que obtuvo Lorentz.

Manuel Gutiérrez. Universidad de Málaga.

Usando las coordenadas geométricas $x_0 = ct$, conseguimos escribir las transformaciones de Lorentz con una matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cs \\ y \end{pmatrix}$$

que representan las isometrías lineales de la métrica de Minkowski

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que cuando la velocidad relativa es despreciable frente a la velocidad de la luz, entonces $\gamma = 1$ y queda una transformación de Galileo

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix}.$$

Esto explica porqué nuestra intuición es más próxima a la mecánica de Newton, ya que nuestra experiencia cotidiana sólo observa movimientos con velocidades bajas.

Ejemplo 2 *Ahora que sabemos cómo se relacionan las coordenadas de dos observadores inerciales, podemos reescribir la relación entre las coordenadas de un suceso en la línea de universo de w', visto por w que será (ct, vt) y visto por el propio w' que será $(cs, 0)$. Entonces según w,*

$$\begin{pmatrix} ct \\ vt \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cs \\ 0 \end{pmatrix}$$

y despejando en la primera se tiene

$$t = \gamma s$$

que es la relación que interpretamos como la dilatación del tiempo.

Ejercicio 1 *Probar que la inversa de la transformación de Lorentz anterior es*

$$\begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}.$$

Esto representa la relación entre las coordenadas según w'.

Ejercicio 2 *Probar que las transformaciones de Lorentz*

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c^2} \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix}$$

son isometrías lineales de la métrica

$$\begin{pmatrix} -c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$