Tema 3. Sección 3.2.
Observadores inerciales.

Manuel Gutiérrez.
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología.
Universidad de Málaga. 29071-Málaga. Spain.
Mayo de 2010.

En esta sección vamos a estudiar un poco más las propiedades de los observadores inerciales usando como herramienta el espacio de Minkowski. Queremos ver cómo representar en este modelo la manera en que un observador inercial $\alpha(t) = tce_0$ con tiempo propio t, observa a una partícula $\sigma : I \to \mathbb{R}^4$ que para nosotros será de momento una curva diferenciable con $\langle \sigma'(s), \sigma'(s) \rangle = -c^2$ si es material o un observador, y $\langle \sigma'(s), \sigma'(s) \rangle = 0$ si es una partícula luz. Sea $R(t) = \{\alpha(t); e_0, e_1, e_2, e_3\}$ una referencia inercial asociada a α. De la identidad

$$\overrightarrow{o\sigma(s)} = a_0(s)e_0 + a_1(s)e_1 + a_2(s)e_2 + a_3(s)e_3 \in L(e_0) \oplus e_0^{\perp}$$

se deduce que α asigna a $\sigma(s)$ un tiempo

$$t(\sigma(s)) = \frac{a_0(s)}{c}$$

esto es, $t = \frac{1}{c}p_1$ donde $p_1 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la proyección sobre $L(e_0)$, mientras que α situa a σ en su espacio de simultaneidad $\overrightarrow{o\alpha(0)}^{\perp} \equiv e_0^{\perp}$ en la posición

$$P(\sigma(s)) = a_1(s)e_1 + a_2(s)e_2 + a_3(s)e_3.$$

Ahora bien, el observador α debe ser capaz de expresar la trayectoria de σ en función de su tiempo propio t que es el único parámetro accesible para él.

$$\frac{dt(\sigma(s))}{ds} = \frac{1}{c}\frac{da_0(s)}{ds} = -\frac{1}{c}\frac{d}{ds}\left\langle \overrightarrow{o\sigma(s)}, e_0 \right\rangle = -\frac{1}{c}\langle \sigma'(s), e_0 \rangle > 0$$

donde la última desigualdad se debe a que e_0 es temporal, $\sigma'(s)$ es causal y ambos están apuntando hacia el cono futuro. Luego la aplicación t restringida a σ que seguiremos llamando t, es un difeomorfismo $t : I \to J$ entre el parámetro s de la curva y el tiempo t que el observador asigna a $\sigma(s)$. Esto quiere decir que podemos considerar s como función de t, y entonces la **trayectoria de σ observada por α** es

$$\sigma_\alpha(t) = P(\sigma(s(t))) = b_1(t)e_1 + b_2(t)e_2 + b_3(t)e_3,$$

siendo $b_i(t) = a_i(s(t))$, $i = 1, 2, 3$.

El siguiente diagrama conmutativo resume la situación

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{R}^4 \\ t\downarrow & & \downarrow p_1 \oplus P \\ J & \longrightarrow & L(e_0) \oplus e_0^{\perp} \end{array}$$

siendo la aplicación de abajo $t \mapsto tce_0 + \sigma_\alpha(t)$.

La **velocidad de σ observada por** α es el vector de $e_0^\perp$

$$\frac{d\sigma_\alpha(t)}{dt} \equiv \sigma'_\alpha(t)$$

y su módulo será

$$v(t) = \langle \sigma'_\alpha(t), \sigma'_\alpha(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(b'_1(t)^2 + b'_2(t)^2 + b'_3(t)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nótese que se puede recuperar la línea de universo de σ a partir de los datos del observador α conociendo la aplicación $t(s)$, haciendo

$$\sigma(s) = t(s)ce_0 + \sigma_\alpha(t(s)).$$

Si derivamos

$$\sigma'(s) = t'(s) \left(ce_0 + \sigma'_\alpha(t(s)) \right)$$

de donde se tiene

$$\langle \sigma'(s), \sigma'(s) \rangle = t'(s)^2 \left(-c^2 + \langle \sigma'_\alpha(t(s)), \sigma'_\alpha(t(s)) \rangle \right) = t'(s)^2 \left(-c^2 + v(t)^2 \right)$$

y de aquí obtenemos dos conclusiones importantes.

1. La partícula σ es luz si y sólo si $v(t) = c$ para todo t, algo que ya sabemos. Esto no nos impone ninguna restricción sobre $t(s)$.

2. Si σ es una partícula material o un observador, entonces s es su tiempo propio cuando $\langle \sigma'(s), \sigma'(s) \rangle = -c^2$ y entonces queda

$$-c^2 = t'(s)^2 \left(-c^2 + v(t)^2 \right)$$

y despejando se tiene

$$t'(s) = \frac{1}{\left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \gamma_{v(t)} > 1,$$

donde la dependencia en el parámetro s es a través de $v(t(s))$. Aquí se ve que la dependencia del tiempo con el tiempo propio de la partícula σ está codificada por el factor de Lorentz, y por tanto depende de la velocidad de σ en cada instante. Si σ es otro observador inercial, entonces v es constante y la relación entre los tiempos es $t = \gamma s$ como ya sabemos.

Manuel Gutiérrez. Universidad de Málaga.