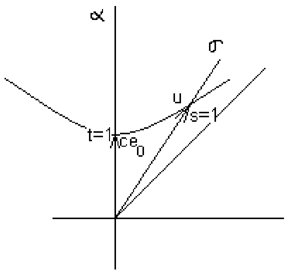
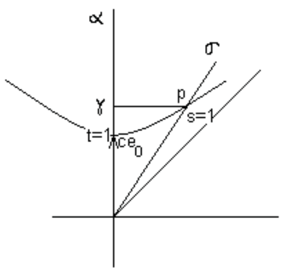
# Tema 3. Sección 4.
# Paradoja de los gemelos.

Manuel Gutiérrez.
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología.
Universidad de Málaga. 29071-Málaga. Spain.
Mayo de 2010.

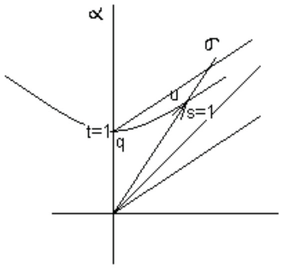
Para analizar la paradoja de los gemelos nos centraremos en el espacio de Minkowski en dimensión dos, $\mathbb{R}^2$. Sea $R(t) = \{\alpha(t) : e_0, e_1\}$ y $S(s) = \{\sigma(s) : u_0, u_1\}$ dos referencias inerciales en posición estandar con velocidad $v$. Podemos representar gráficamente la unidad de tiempo en la línea de universo de $\sigma(s) = scu_0$, para ello basta transformar el vector $ce_0$ mediante un boost, y sabemos que el resultado es que el transformado está sobre una hipérbola.



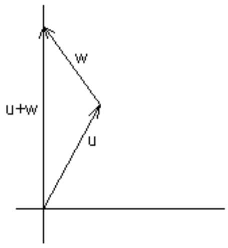

Llamemos $p = \sigma(1)$ al suceso que ocurre en la línea de universo de $\sigma$ en el instante 1 según el propio $\sigma$. El observador $\alpha$ asigna a $p$ un tiempo mayor debido a la relación $t = \gamma s$. En nuestro caso asigna a $p$ el tiempo $t = \gamma$. Gráficamente significa proyectar $p$ mediante una paralela al eje $e_1$ sobre la línea de universo de $\alpha$, que a su vez proviene simplemente de expresar $\overrightarrow{op} = tce_0 + x_1e_1$.




Llamemos ahora $q = \alpha(1)$. El observador $\sigma$ asigna a $q$ un tiempo mayor también puesto que la dilatación del tiempo para $\sigma$ hace que observe que el tiempo pasa más despacio para $\alpha$, de hecho lo que observa $\sigma$ es también $s = \gamma t$. La representación gráfica también se basa en la expresión de $\overrightarrow{oq} = scu_0 + y_1u_1$.




En definitiva se trata de un fenómeno completamente simétrico para $\alpha$ y $\sigma$. ¿Qué pasa si $\sigma$ decide dar media vuelta y regresar al encuentro de $\alpha$?




La trayectoria de $\sigma$ estará compuesta por dos tramos, el primero está representado por el vector $u$ y el segundo por el vector $w$. Para el observador $\alpha$, el tiempo del viaje es, digamos, $t_0$. Esto significa que $u + w = \alpha(t_0) = t_0 c e_0$, y tomando normas se tiene

$$t_0 = \frac{1}{c} |u + w| \, .$$

En cambio para $\sigma$, el tiempo de viaje es $s_0 = s_1 + s_2$ siendo $u = \sigma(s_1) = s_1 c u_0$ y $w = \overrightarrow{\sigma(s_1)\sigma(s_1 + s_2)} = s_2 c w_0$, con $u_0$ y $w_0$ temporales unitarios. Por tanto tomando normas de nuevo

$$s_1 + s_2 = \frac{1}{c}(|u| + |w|)$$

y la desigualdad triangular invertida, teniendo en cuenta que $u$ y $w$ no son colineales, nos dice que $|u + w| > |u| + |w|$, es decir

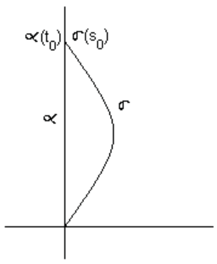
$$t_0 > s_1 + s_2.$$

Esto quiere decir que ha pasado más tiempo para $\alpha$. Pero si suponemos que el viaje se ha hecho en el espacio sin ningún punto de referencia cercano, $\sigma$ podría decir que no se ha movido de su sitio y que ha sido $\alpha$ el que ha hecho un viaje de ida y vuelta. Como la dilatación del tiempo es un fenómeno simétrico, $\sigma$ vería que ha pasado más tiempo para él que para $\alpha$.

Dos astronautas gemelos están en una estación espacial. En un momento dado uno de ellos hace un viaje espacial siguiendo una ruta inercial, y vuelve por el mismo camino también de forma inercial. El que quedó en la estación espera su regreso y piensa que cuando vuelva su hermano será años más joven que él por la dilatación del tiempo. Como el fenómeno es simétrico, el astronauta que ha realizado el viaje piensa que él mismo será el más viejo por el mismo efecto. Cuando se abre la escotilla está claro que sólo ocurre una de las dos cosas, pero ¿cual de ellas? Esto se llama la paradoja de los gemelos.

En realidad no hay tal paradoja puesto que el fenómeno completo no es simétrico para $\alpha$ y $\sigma$. En efecto, $\alpha$ es un observador inercial mientras que $\sigma$ no lo es, y la aceleración que necesita $\sigma$ para cambiar su dirección es una magnitud absoluta que ambos pueden medir.

La paradoja de los gemelos no depende de la desigualdad triangular invertida, y de hecho es válida para el caso en que el segundo observador $\sigma$ no sea necesariamente inercial a trozos. En efecto, sea $\sigma$ un observador arbitrario con tiempo propio $s$ que parte de $o = \alpha(0)$ hace un viaje y vuelve a encontrarse con $\alpha$ en $\alpha(t_0)$ tras un tiempo según él de $s_0$. Entonces también ocurre $t_0 > s_0$.




Para verlo, por ser $\alpha$ inercial, puede descomponer la trayectoria espaciotemporal de $\sigma(s)$

$$\overrightarrow{o\sigma(s)} = t(s)ce_0 + \sigma_\alpha(t(s))$$

sabemos que la dependencia entre los tiempos propios del observador inercial y el otro observador está codificada por la función $t(s)$ que verifica

$$t'(s) = \gamma(v(s)) > 1.$$

Entonces

$$s_0 = \int_0^{s_0} ds < \int_0^{s_0} t'(s)ds = t(s_0) - t(0) = t_0.$$



Manuel Gutiérrez. Universidad de Málaga.