Tema 3. Sección 5.
Contracción de Lorentz-Fitzgerald.

Manuel Gutiérrez.
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología.
Universidad de Málaga. 29071-Málaga. Spain.
Junio de 2010.

Hasta ahora nos hemos ocupado de estudiar los fenómenos relacionados con la medida del tiempo. En esta sección nos ocuparemos de un fenómeno de la medida del espacio análoga a la dilatación del tiempo.

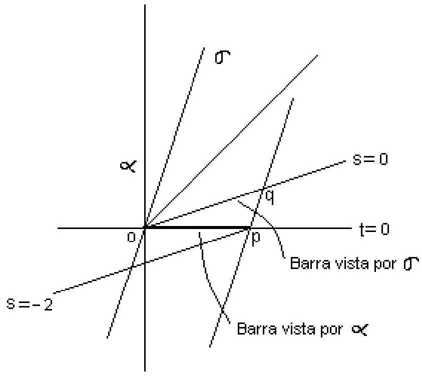
Vamos a ver cómo se produce esta discrepancia cuando ambos observadores miden la longitud de una barra rígida.

Sea α un observador inercial que quiere medir la longitud de una barra rígida. Es obvio que la manera de hacerlo es poner junto a la barra una cinta métrica y tomar las medidas de sus extremos. Sin embargo las cosas no son tan sencillas cuando lo que se quiere medir es la distancia de la Tierra a la Luna, o simplemente una barra que va con una velocidad relativista respecto a α. Entonces nos vemos obligados a concretar cuál es el proceso de medir, proceso que deberá ser compatible con los principios de la Relatividad.

La clave es darse cuenta de que lo que hay que hacer es medir la posición de los extremos de la barra **simultáneamente**. La medición de la posición de cada extremo la podemos hacer con el procedimiento radar que ya conocemos y que sabemos que es compatible con los principios de la relatividad. Todo el problema se centra en decidir la simultaneidad de las mediciones, y como sabemos esto es una cuestión que depende de cada observador, pero que se puede realizar. Por ejemplo, en el caso de la barra, basta poner una cinta métrica suficientemente grande en reposo para α y tomar dos fotos **simultáneas** de los extremos de la barra, luego sólo habrá que restar las medidas observadas de cada extremo.

Vamos a analizar el proceso mediante un diagrama de Minkowski.

Sea α un observador inercial que observa el paso de una barra a velocidad constante $v \in \mathbb{R}$ por su línea de universo. En el extremo posterior de la barra viaja un observador σ que será inercial con velocidad relativa v respecto de α. En el instante $s = 0$ para σ, los extremos trasero y delantero de la barra ocupan la posición o y q respectivamente, en cambio para α, en el instante $t = 0$ los extremos ocupan las posiciones o y p respectívamente.



El observador α toma dos fotos en el instante $t = 0$, observa las mediciones de las distancias y le sale que p está a una distancia L_0, y o a una distancia 0, por lo que la longitud de la barra es L_0.

Sin embargo σ observa que α toma una foto del extremo delantero p de la barra en el instante digamos $s = -2$, y del extremo trasero o en $s = 0$, con lo que para él la medida está falseada por que no se han tomado simultaneamente. Para σ no será ninguna sorpresa que a α le salga que la barra es más corta.

De hecho, se puede cuantificar la diferencia. La barra está en reposo para σ y tiene una longitud L. Las lineas de universo de los extremos tienen coordenadas $(cs, 0)$ y (cs, L). Las coordenadas de estas líneas de universo en la referencia de α serán, en función del parámetro s,

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cs \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} cs \\ vs \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cs \\ L \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} cs + \frac{v}{c} L \\ vs + L \end{pmatrix}$$

Para saber la longitud de la barra medida por α, tenemos que saber las coordenadas de dos sucesos simultaneos para α en las líneas de universos de los extremos de la barra. Tomamos los extremos de la barra para $t = 0$. Las coordenadas del primer extremo de la barra son $(0, 0)$, para la segunda, hacemos $t = 0$, y se obtiene $s = -\frac{v}{c^2} L$ y

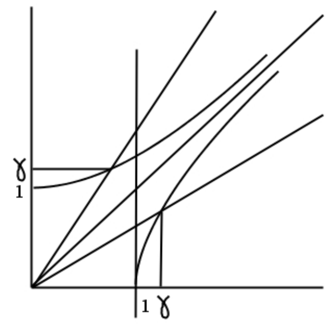
$$L_0 = \gamma(vs + L) = \gamma(-\frac{v^2}{c^2} + 1)L = \gamma^{-1} L$$

Luego la longitud de la barra para α es $\gamma^{-1} L$, es decir, observa la barra más corta que σ en un factor $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$. Este fenómeno se llama **contracción de Lorentz-Fitzgerald**.

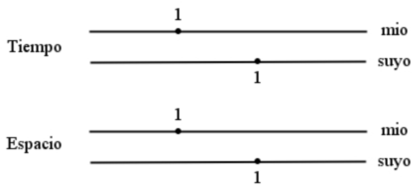
En resumen, si por mi lado pasa un observador a velocidad $v \in \mathbb{R}$, veo que su tiempo va más despacio que el mío con una relación $t = \gamma s$. Esto significa

Manuel Gutiérrez. Universidad de Málaga.

que un suceso en su línea de universo que para mí ocurre en $t = 1$, para el otro observador ocurre en el instante $s = \gamma^{-1} < 1$. Además, una barra en reposo conmigo, la ve el otro observador más corta con una relación $y = \gamma^{-1}x$, es decir, si la barra es de un metro, él la ve con la longitud $y = \gamma^{-1}$ en su espacio de simultaneidad. La relación entre nuestros espacios es también $x = \gamma y$.



Su tiempo se dilata en el sentido de que su unidad de tiempo es más larga que que mi unidad de tiempo.



Lo mismo ocurre con el espacio, su unidad de espacio es más larga que mi unidad de espacio con la misma proporción, pero en este caso se dice que su espacio se contrae. En ambos casos es el mismo fenómeno con las unidades de medida.

Ejercicio 1 *Un cometa se dirige hacia la Tierra a velocidad* 0.5. *Para destruirlo, se necesita enviar un cohete cargado de bombas que impacte a una velocidad relativa de* 0.8 *con el cometa. ¿Cuál será la velocidad con que debe lanzarse? En este ejercicio la velocidad de la luz es* $c = 1$.

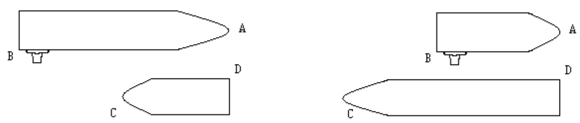
Ejercicio 2 *Supongamos que α es un observador inercial en el sistema solar. Por su línea de universo pasa otro observador inercial σ a velocidad relativista v hacia una estrella en reposo respecto a α y que está según α a 100 años luz. Esto significa que un rayo de luz desde el sistema solar tarda 100 años en llegar a la estrella para α. Calcular a qué velocidad v debe ir σ para tardar un año en llegar a la estrella, según σ.*

Ejercicio 3 *¿A qué distancia observa σ la estrella si va a la velocidad v calculada en el ejercicio anterior?*

Manuel Gutiérrez. Universidad de Málaga.

Ejercicio 4 *¿Cuánto tarda σ en llegar a la estrella según el observador α de los ejercicios anteriores?*

Ejercicio 5 *Dos cohetes de igual longitud en reposo se cruzan a velocidad relativista rozándose, es decir, pasando a una distancia despreciable entre ellos. La tripulación del primero observa que en el instante en que la punta de su nave se cruza con la cola de la otra, se le dispara por accidente el cañón de su cola. Conscientes de la contracción de Lorentz-FitzGerald piensan que la otra nave aún no ha llegado a la altura del cañón, y todo quedará en un susto. Sin embargo, alguien opina que la tripulación del otro cohete, por el mismo efecto de la contracción, debería ver que el disparo le da en mitad de la panza. Es claro que sólo puede ocurrir una de las dos alternativas, pero ¿Cual de ellas ocurre?*



Manuel Gutiérrez. Universidad de Málaga.