Tema 3. Sección 6.
Energía-momento de partículas materiales.

Manuel Gutiérrez.
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología.
Universidad de Málaga. 29071-Málaga. Spain.
Junio de 2010.

Supondremos que hay una noción de **masa en reposo** de una partícula material. Sea $\sigma(s)$ una partícula material de masa m. Siguiendo el análogo newtoniano, llamaremos **4-momento** o **cuadrimomento** al campo de vectores sobre $\sigma(s)$, es decir, para cada s es un vector de $\mathbb{R}^4$que se apoya en $\sigma(s)$, dado por

$$P(s) = m\sigma'(s).$$

Sea $\alpha(t) = cte_0$ un observador inercial. Sabemos que observa a la partícula descomponiendo su línea de universo en dos partes, una en la dirección del vector e_0 y la otra en la dirección de su hiperplano de simultaneidad $e_0^{\perp}$. Vamos a descomponer de la misma forma el 4-momento de la partícula. Llamemos $v = v(t)$ a la velocidad de la partícula en el instante t. Entonces recordando que $\sigma'(s) = t'(s)\,(ce_0 + \sigma'_\alpha(t(s)))$ y $t'(s) = \gamma_{v(t)}$, se tiene que

$$\begin{aligned} P(s(t)) &= m\sigma'(s(t)) = m\gamma(ce_0 + \sigma'_\alpha(t)) \\ &= m\gamma ce_0 + m\gamma\sigma'_\alpha(t) \in L(e_0) \oplus e_0^{\perp}. \end{aligned}$$

Ambas son cantidades que α puede medir en términos de su tiempo propio t. El segundo término $m\gamma\sigma'_\alpha(t)$ se llama **3-momento de la partícula observada por** α.

Analizamos el coeficiente del primer término

$$m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

La aplicación $f(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$ es analítica, es decir, desarrollable en serie de potencias, en el intervalo $(-1, 1)$. Esto significa que en dicho intervalo la función f es igual a una serie

$$f(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + ...$$

En realidad se trata de la serie de Taylor de f centrada en cero y se calcula mediante la fórmula

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} r^n.$$

En nuestro caso podemos hacer algunas manipulaciones simples para calcular los primeros coeficientes. En efecto, buscamos una serie que cumpla

$$\left(a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + ...\right)\left(a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + ...\right) = \frac{1}{1 - r^2}. \tag{1}$$

La manera de efectuar el producto de las series es ir multiplicando los términos que nos den potencia cero de r, después los que nos den potencia 1, y así sucesívamente. En realidad se pueden ordenar los términos de cualquier otra manera debido a que el resultado es una serie absolutamente convergente. El segundo miembro es muy conocido,

$$\frac{1}{1-r^2} = 1 + r^2 + r^4 + ...$$

válido en $(-1, 1)$. Como $a_0 = f(0) = 1$, identificando coeficientes en (1) vamos obteniendo el resto de los coeficientes, por ejemplo para obtener los primeros

$$\begin{aligned} 2a_0a_1 = 0 &\Rightarrow a_1 = 0 \\ 2a_0a_2 + a_1^2 = 1 &\Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \\ 2(a_0a_3 + a_1a_2) = 0 &\Rightarrow a_3 = 0 \\ 2(a_0a_4 + a_1a_3) + a_2^2 = 1 &\Rightarrow a_4 = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

etcétera. Así que los primeros términos de la serie son

$$f(r) = 1 + \frac{1}{2}r^2 + \frac{3}{8}r^4 + ...$$

Aplicándolo a nuestro caso y despreciando términos de orden mayores que 2, se tiene

$$m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) = m + \frac{1}{2}m\frac{v^2}{c^2}.$$

Se llama **masa relativista** a la cantidad

$$m_r = m\gamma = m + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

y como se ve excede a la masa en reposo en $\frac{1}{c^2}$ su energía cinética. Observando el segundo término, Einstein definió la energía total de la partícula como

$$E = mc^2\gamma.$$

De esta ecuación se observa que cuando la partícula está en reposo aparece la famosa ecuación de Einstein que establece la equivalencia entre masa y energía

$$E = mc^2.$$

Por otra parte, se ve que se necesita infinita energía para que la partícula alcance la velocidad de la luz.

Manuel Gutiérrez. Universidad de Málaga.