# Tema 3. Relatividad especial

Manuel Gutiérrez
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Universidad de Málaga

Mayo 2009

## 7 Energía-momento de partículas materiales

Supondremos que hay una noción de **masa en reposo** de una partícula material. Sea $\sigma(s)$ una partícula material de masa $m$. Siguiendo el análogo newtoniano, llamaremos **4-momento** o **cuadrimomento** al campo de vectores sobre $\sigma(s)$, es decir, para cada $s$ es un vector de $\mathbb{R}^4$que se apoya en $\sigma(s)$, dado por

$$P(s) = m\sigma'(s).$$

Sea $\alpha(t) = cte_0$ un observador inercial. Sabemos que observa a la partícula descomponiendo su línea de universo en dos partes, una en la dirección del vector $e_0$ y la otra en la dirección de su hiperplano de simultaneidad $e_0^{\perp}$. Vamos a hacer lo mismo con el 4-momento de la partícula. Llamemos $v = v(t)$ a la velocidad de la partícula en el instante $t$. Entonces $\sigma'(s) = t'(s)\,(ce_0 + \sigma'_\alpha(t(s)))$ y $t'(s) = \gamma_{v(t)}$ y se tiene que

$$\begin{aligned} P(s(t)) &= m\sigma'(s(t)) = m\gamma(ce_0 + \sigma'_\alpha(t)) \\ &= m\gamma ce_0 + m\gamma\sigma'_\alpha(t) \in L(e_0) \oplus u^{\perp}. \end{aligned}$$

Ambas son cantidades que $\alpha$ puede medir en términos de su tiempo propio $t$. El segundo término $m\gamma\sigma'_\alpha(t)$ se llama **3-momento de la partícula observada por** $\alpha$.

Analizamos el coeficiente del primer término

$$m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

La aplicación $f(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$ es analítica, es decir, desarrollable en serie de potencias, en el intervalo $(-1, 1)$. Esto significa que en dicho intervalo la función $f$ es igual a una serie

$$f(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + ...$$

En realidad se trata de la serie de Taylor de $f$ centrada en cero y se calcula mediante la fórmula

$$f(r)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(0)}{n!}r^n.$$

En nuestro caso podemos hacer algunas manipulaciones simples para calcular los primeros coeficientes. En efecto, buscamos una serie que cumpla

$$\left(a_0+a_1r+a_2r^2+...\right)\left(a_0+a_1r+a_2r^2+...\right)=\frac{1}{1-r^2}. \tag{1}$$

La manera de efectuar el producto de las series es ir multiplicando los términos que nos den potencia cero de $r$, después los que nos den potencia 1, y así sucesívamente. En realidad se pueden ordenar los términos de cualquier otra manera debido a que el resultado es una serie absolutamente convergente. El segundo miembro es muy conocido,

$$\frac{1}{1-r^2}=1+r^2+r^4+...$$

válido en $(-1,1)$. Como $a_0=f(0)=1$, identificando coeficientes en (1) vamos obteniendo el resto de los coeficientes, por ejemplo para obtener los primeros

$$\begin{aligned}2a_0a_1=0&\Rightarrow a_1=0\\ 2a_0a_2+a_1^2=1&\Rightarrow a_2=\frac{1}{2}\\ 2(a_0a_3+a_1a_2)=0&\Rightarrow a_3=0\\ 2(a_0a_4+a_1a_3)+a_2^2=1&\Rightarrow a_4=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

etcétera. Así que los primeros términos de la serie son

$$f(r)=1+\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{8}r^4+...$$

Aplicándolo a nuestro caso y despreciando términos de orden mayores que 2, se tiene

$$m\gamma=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=m(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2})=m+\frac{1}{2}m\frac{v^2}{c^2}.$$

Se llama **masa relativista** a la cantidad

$$m_r=m\gamma=m+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

y como se ve excede a la masa en reposo en $\frac{1}{c^2}$ su energía cinética. Observando el segundo término, Einstein definió la energía total de la partícula como

$$E=mc^2\gamma.$$

De esta ecuación se observa que se necesita infinita energía para que la partícula alcance la velocidad de la luz. Por otra parte, cuando la partícula está en reposo aparece la famosa ecuación de Einstein que establece la equivalencia entre masa y energía

$$E = mc^2.$$