Manuel Gutiérrez
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Universidad de Málaga

November 30, 2005

El Grupo General Lineal.

Una aplicación $f : U \to V$ entre dos espacios vectoriales es un **isomorfismo** cuando es lineal y biyectiva. Si además $U = V$, entonces se llama **automorfismo**. Es fácil ver que el conjunto de todos los automorfismos de un espacio vectorial V tiene una estructura de grupo para la composición. Se llama **grupo de los automorfismos de** V, $Aut(V)$.

Ejercicio 30 *Probar que $Aut(\mathbb{R}^n)$ tiene estructura de grupo.*

Siguiendo el programa Erlangen de F. Klein, este grupo determina una geometría que es el objeto de estudio del **Álgebra lineal**.

Proposición 1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un automorfismo, entonces se tienen las siguientes propiedades:*

1. $f(0) = 0$.
2. *Si $(v_1, ..., v_n)$ es una base, entonces $(f(v_1), ..., f(v_n))$ es otra base.*
3. *Si V es un subespacio, entonces $f(V) = \{f(v) \ / \ v \in V\}$ es un subespacio de la misma dimensión.*
4. *Si U, V son subespacios, entonces $f(U+V) = f(U)+f(V)$ y $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$.*

Puesto que, fijada una base, las aplicaciones lineales están representadas por matrices, podemos estudiar el grupo $Aut(\mathbb{R}^n)$ a partir de ellas.

Ejercicio 31 *Usando las propiedades de los determinantes probar que, fijada una base, existe una correspondencia biyectiva entre los automorfismos de $\mathbb{R}^n$ y las matrices regulares.*

Así pues el conjunto de las matrices regulares de orden n forman un grupo llamado **grupo general lineal** y se denota $GL(n, \mathbb{R})$. Conviene conocer un procedimiento operativo para calcular la inversa de una matriz. Si $A = (a_{ij})$, y $A^{-1} = (b_{ij})$, entonces

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{|A_{ji}|}{|A|}$$

Otro procedimiento, que evita tener que calcular determinantes, consiste en resolver el sistema $AA^{-1} = I$, tomando los elementos de A^{-1} como las incógnitas, y resolverlo por el método de eliminación de Gauss-Jordan. Por ejemplo, para invertir la matriz regular

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

se plantea el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que desplegado sería

$$\begin{aligned} 2b_{11} - 2b_{21} \qquad &= 1 & \qquad 2b_{12} - 2b_{22} \qquad &= 0 & \qquad 2b_{13} - 2b_{23} \qquad &= 0 \\ b_{11} + b_{21} - 2b_{31} &= 0 & b_{12} + b_{22} - 2b_{32} &= 1 & b_{13} + b_{23} - 2b_{33} &= 0 \\ -b_{11} + 2b_{21} + b_{31} &= 0 & -b_{12} + 2b_{22} + b_{32} &= 0 & -b_{13} + 2b_{23} + b_{33} &= 1 \end{aligned}$$

ahora hay que despejar los coeficientes b_{ij} y para ello podemos trabajar con cada bloque de ecuaciones puesto que comparten los coeficientes. Las operaciones que podemos hacer son

1. Multiplicar una ecuación por un número no nulo.
2. Sumar a una ecuación, miembro a miembro, una combinación lineal del resto de ecuaciones.

Necesitamos repetir estas operaciones hasta que la matriz de los coeficientes sea la identidad. Puesto que son operaciones que se basan en los coeficientes, podemos hacerlo prescindiendo de las incógnitas b_{ij}, y además podemos hacer los tres bloques simultáneamente.

Debemos usar repetidamente los pasos 1 y 2 sobre las filas de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para convertirla en otra que tenga en el primer bloque la identidad. Entonces la matriz que queda en el segundo bloque es precisamente la inversa que buscamos. Vamos a hacerlo paso a paso.

$$
\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \equiv
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{4}{8} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{2}{8} & \frac{4}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{4}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{4}{8} \end{pmatrix}
$$

Supongamos que A es la matriz de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en la base B. Podemos saber cuál es la matriz A' de f en otra base B' sabiendo la matriz del cambio de base P de B a B'. En efecto, todo vector $u \in \mathbb{R}^n$ de componentes x en B y x' en B', tiene sus componentes relacionadas por $x' = Px$. En particular la imagen de u por f, tiene componentes Ax en la base B y $A'x' = A'Px$ en B', por tanto $A'Px = PAx$ para todo x, de donde se obtiene

$$A' = PAP^{-1}.$$

Obsérvese en particular que $|A'| = \left|PAP^{-1}\right| = |P|\,|A|\,\left|P^{-1}\right| = |A|$, es decir, el determinante de la matriz que representa a f es invariante frente a un cambio de bases.