Manuel Gutiérrez
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Universidad de Málaga

November 30, 2005

El Grupo Ortogonal.

Definición 1 *Un* ***producto escalar*** *en* $\mathbb{R}^n$ *es una aplicación* $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *que verifica:*

1. *Es bilineal, es decir, es lineal en cada variable.*
2. *Es simétrica:* $u \cdot v = v \cdot u$ *para todo* $u, v \in \mathbb{R}^n$.
3. *Es definida positiva:* $u \cdot u \geq 0$ *para todo* $u \in \mathbb{R}^n$. *La igualdad se alcanza si y sólo si* $u = 0$.

Fijada una base $B = (u_1, ..., u_n)$, el producto escalar determina una matriz $A = (a_{ij})$ definiendo $a_{ij} = u_i \cdot u_j$. Se le llama **matriz del producto escalar en la base** B. Esta matriz determina completamente al producto escalar. En efecto, si $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ son las componentes de u y v respectivamente en la base B, entonces

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j u_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j u_i \cdot u_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ij} = x^t A y. \end{aligned}$$

Si fijamos otra base $B' = (u'_1, ..., u'_n)$, entonces podemos encontrar una relación entre las matrices del producto escalar en ambas bases. Sea P la matriz del cambio de base de B a B'. Entonces si x y x' son las componentes de u en B y B', e y, y' las de v, sabemos que

$$\begin{aligned} x' &= Px \\ y' &= Py \end{aligned}$$

por tanto se tiene

$$\begin{aligned} u \cdot v &= x^t A y \\ u \cdot v &= x'^t A' y' = (Px)^t A' P y \\ &= x^t P^t A' P y \end{aligned}$$

y como u, v son arbitrarios, se tiene

$$A = P^t A' P.$$

Si fijamos la base canónica, la aplicación

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

con $x = (x_1, ..., x_n)$ $y = (y_1, ..., y_n)$ es un producto escalar llamado **producto escalar euclídeo** o **métrica euclídea**. Su matriz en la base canónica es I.

Dos vectores u, v se dicen **ortogonales** cuando $u \cdot v = 0$. El ortogonal de un vector u es el conjunto $u^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n \ / \ u \cdot v = 0\}$.

Ejercicio 32 (*) *Probar que si $u \neq 0$, entonces $u^{\perp}$ es un subespacio tal que $\mathbb{R}^n = L(u) \oplus u^{\perp}$.*

Un producto escalar siempre tiene asociado una **norma** que es la función

$$|\cdot| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definida por

$$|u| = (u \cdot u)^{\frac{1}{2}}$$

Por ejemplo, la norma asociada a la métrica euclídea es la longitud del vector

$$|u| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

Un vector u se dice **unitario** cuando $|u| = 1$. Una **base ortonormal** es una base formada por vectores ortogonales dos a dos y unitarios.

La base canónica es una base ortonormal para el producto euclídeo.

Propiedades.

Si $u, v \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

1. $|u| = 0$ si y sólo si $u = 0$.
2. $|\lambda u| = |\lambda| \, |u|$.
3. Desigualdad de Schwarz. $|u \cdot v| \leq |u| \, |v|$ y la igualdad se da si y sólo si u y v son colineales.
4. Desigualdad triangular. $|u + v| \leq |u| + |v|$ y la igualdad se da si y sólo si $u = kv$ con $k \in \mathbb{R}^+$.

Ejercicio 33 (*) *Usando el ejercicio 32, probar la desigualdad de Schwarz.*

Ejercicio 34 (*) *Usando la desigualdad de Schwarz, probar la desigualdad triangular.*

Debido a la desigualdad de Schwarz, cuando u y v no son cero se tiene

$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|} \leq 1$$

de modo que existe un único número $\alpha \in [0, \pi]$ tal que

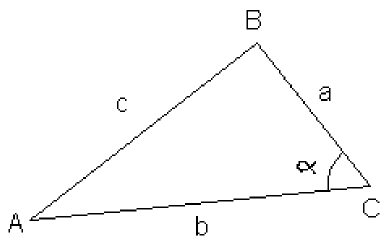
$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|}. \tag{1}$$

Dicho número se llama **ángulo entre** u **y** v. La capacidad de un producto escalar de medir longitud de vectores y ángulos entre ellos es lo que le confiere la importancia que tiene.

Obsérvese que se elige el coseno y no el seno por que es la única elección compatible con la trigonometría. Por ejemplo, en el caso euclídeo dos vectores serán ortogonales cuando el ángulo entre ellos sea $\frac{\pi}{2}$, que corresponde a la perpendicularidad clásica.

Con esta herramienta en la mano muchos resultados de la geometría Griega clásica se hacen evidentes. Por ejemplo, si en un triángulo de lados a, b, c, el ángulo que forma a y b es α, entonces el teorema del coseno afirma que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$



Si los vértices opuestos a a, b, c son A, B, C respectivamente, y tomamos C como el origen, se tiene

$$|A - B|^2 = (A - B) \cdot (A - B) = |A|^2 + |B|^2 - 2A \cdot B$$

que, usando (1), es justo el teorema del coseno.

En adelante supondremos fijada la métrica euclídea.

Definición 2 *Una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama **isometría** cuando es un isomorfismo que conserva la métrica. Esto es, para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$*

$$f(u) \cdot f(v) = u \cdot v.$$

Ejercicio 35 (*) *Probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conserva la métrica entonces es un isomorfismo.*

Ejercicio 36 (*) *Probar que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría si y sólo si lleva bases ortonormales en bases ortonormales.*

El conjunto de todas las isometrías forma un grupo para la composición que se llama **grupo de las isometrías lineales de** $\mathbb{R}^n$.

Este grupo está representado por un subgrupo del grupo general lineal, llamado **grupo ortogonal** y se denota $O(n)$. Sus elementos se llaman **matrices ortogonales**. Para caracterizarlo fijamos una base $B = (u_1, u_2, ..., u_n)$, tal que la matriz de la métrica euclídea en ella sea C y la de la isometría A. Podemos escribir la condición $f(u) \cdot f(v) = u \cdot v$ en la base B, como

$$x^t A^t C A y = x^t C y$$

pero si además la base B es ortonormal, entonces $C = I$, y nos queda

$$x^t A^t A y = x^t y$$

para todo x, y, de donde se deduce que

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \ / \ A^t A = I\}$$

Si tomamos determinantes a una matriz ortogonal se observa que $|A| = \pm 1$. Las matrices ortogonales de determinante 1 forman un subgrupo de $O(n)$ llamado **grupo especial ortogonal** $SO(n)$.

El grupo ortogonal tiene dos componentes conexas formadas por las matrices de determinante 1 y por las de determinante -1.