Manuel Gutiérrez
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Universidad de Málaga

November 30, 2005

El Grupo Afín.

En esta sección estudiaremos $\mathbb{R}^n$ desde el punto de vista de su estructura afín. Aunque las ideas de espacio afín ya aparecen en la obra de Descartes (1596-1659) la noción fue introducida formalmente por H. Weyl en su libro "Space, time and matter", Dover 1952.

Definición 1 *Sea A un conjunto cuyos elementos llamaremos puntos, y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Se dice que A es un* ***espacio afín asociado a*** *V cuando existe una ley de composición externa*

$$\begin{aligned} + \quad &: A \times V \to A \\ &(p, v) \mapsto p + v \end{aligned}$$

que verifica:

1. *Seudoasociatividad. Para todo $p \in A$ y todo $u, v \in V$, $(p + u) + v = p + (u + v)$.*

2. *Para cada $p, q \in A$ existe un único $v \in V$ con $p = q + v$.*

A ceces se denota $v = \overrightarrow{pq}$ y se llama **vector de origen** p **y extremo** q. Se define la **dimensión de** A como la de V.

En nuestro caso es claro que tomaremos $A = \mathbb{R}^n$ y $V = \mathbb{R}^n$, y que la operación $+$ es la suma de vectores de $\mathbb{R}^n$. Esto facilita el cálculo, pues identificando un punto de $\mathbb{R}^n$ con el vector de origen 0 y extremo el punto, se tiene $\overrightarrow{pq} = q - p$.

La idea es por tanto poder trasladar los conceptos relacionados con el espacio vectorial a cualquier punto del espacio.

Definición 2 *Sea F un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Se llama* ***variedad lineal o subespacio afín que pasa por*** *$p \in \mathbb{R}^n$* ***con dirección*** *F, al subconjunto de $\mathbb{R}^n$*

$$p + F = \{p + v \ / \ v \in \mathbb{R}^n\}.$$

La **dimensión de** $p + F$ es la de F. Las variedades lineales de dimensión 0 son los puntos. Las de dimensión 1 y $n - 1$ se llaman **rectas** e **hiperplanos** respectivamente.

Los problemas de incidencia entre variedades lineales no son triviales. Por ejemplo la noción de suma de variedades lineales es

$$(p + U) + (q + W) = p + (U + W + L(\overrightarrow{pq})).$$

Definición 3 *Un* ***sistema de referencia*** *es un conjunto* $R = \{p; u_1, ...u_n\}$ *donde* $p \in \mathbb{R}^n$ *es el* ***origen*** *del sistema y* $(u_1, ...u_n)$ *es una base de* $\mathbb{R}^n$*.*

Fijado un sistema de referencia podemos dar coordenadas a los puntos del espacio de la siguiente forma. Sea $q \in \mathbb{R}^n$, entonces las **coordenadas de** q **en** R son las componentes de $\overrightarrow{pq}$ en la base $(u_1, ...u_n)$ y se denota q_R.

Definición 4 *Cada vector* $a \in V = \mathbb{R}^n$ *define una* ***traslación*** *definida por*

$$\begin{aligned} \tau_a : \mathbb{A} &\to \mathbb{A} \\ p &\mapsto p + a \end{aligned}$$

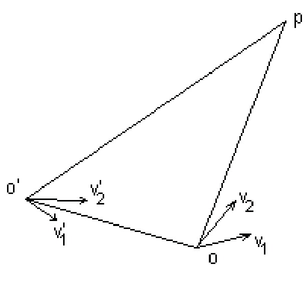
Definición 5 *Una* ***aplicación afín*** $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *es una composición de una aplicación lineal y una traslación. Se llama* ***transformación afín*** *cuando la aplicación lineal es un isomorfismo.*

Esta definición no es la más general y tiene sentido gracias a que en nuestro caso $A = V = \mathbb{R}^n$, pero es simple y sirve para nuestros propósitos.

El conjunto de todas las transformaciones afines tiene estructura de grupo llamado **grupo afín**. Supongamos que $f = \tau_a \circ g$ es una aplicación afín. Si fijamos una referencia $R = \{o; v_1, ..., v_n\}$, supongamos que g tiene matriz A en la base $B = (v_1, ..., v_n)$, y que $a_B = c$. Sea $p \in \mathbb{R}^n$ con coordenadas $x = p_R$, $x' = f(p)_R$. Entonces, la aplicación afín está dada por la expresión matricial

$$x' = f(p)_R = (\tau_a \circ g(p))_R = (g(p) + a)_R = Ax + c$$

Sea $R = \{o; v_1, ..., v_n\}$ y $R' = \{o'; v'_1, ..., v'_n\}$ dos sistemas de referencia con bases asociadas $B = (v_1, ..., v_n)$ y $B' = (v'_1, ...v'_n)$ respectivamente, $p \in \mathbb{R}^n$ un punto de coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$ en R y $x' = (x'_1, ..., x'_n)$ en R', y supongamos que $\overrightarrow{o'o}_{B'} = c \in \mathbb{R}^n$



Sea $C = (c_{ij})$ la matriz del cambio de base de B a B'. Las coordenadas de p en R y en R' las denotamos

$$p_R = \overrightarrow{op}_B = x$$
$$p_{R'} = \overrightarrow{o'p}_{B'} = x'$$

Puesto que $\overrightarrow{op}$ es un vector de $\mathbb{R}^n$ podemos ver sus componentes en la base B' en función de las componentes en B,

$$\overrightarrow{op}_{B'} = Cx$$

y como $\overrightarrow{o'p} = \overrightarrow{o'o} + \overrightarrow{op}$, las componentes en la base B' serán $\overrightarrow{o'p}_{B'} = \overrightarrow{o'o}_{B'} + \overrightarrow{op}_{B'}$, es decir,

$$x' = c + Cx.$$

Fijada la referencia R, se dice que la referencia R' se obtiene aplicando a R una transformación afín.

Así que un cambio de referencia afín está dado por una transformación afín.

Recíprocamente, dada una referencia afín $R = \{o; v_1, ..., v_n\}$ y una transformación afín $f : A \to A$ dada por $f(u) = \tau_a \circ g$, entonces $R' = \{f(0); g(v_1), ..., g(v_n)\}$ es una referencia afín.

En definitiva, el conjunto de todas las referencias afines se puede representar por el grupo afín.

Cuando la base del sistema de referencia es ortonormal, se dice que es un **sistema de referencia ortonormal**.

Definición 6 *Las transformaciones afines $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que en una referencia ortonormal se escriben como $x' = Ax + c$ con*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & F \end{pmatrix}$$

*siendo $v \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}^4$ y $F \in O(3, \mathbb{R})$ se llaman **transformaciones de Galileo**. Tienen una estructura de grupo llamado **grupo de Galileo**.*

Ejercicio 37 *Probar que las transformaciones de Galileo tienen efectivamente estructura de grupo.*

La importancia del grupo de Galileo radica en que fijada una referencia ortonormal en $\mathbb{R}^4$, todas las referencias que se obtienen a partir de ella por miembros del grupo describen una familia distinguida de referencias llamadas **referencias inerciales**, que son aquellas en las que son válidas las leyes de la mecánica de Newton.